Übungen zur Vorlesung **WS 2015/16**

Mathematische Methoden der Physik **Blatt 7**

Priv. Doz. Dr. Johannes Roth

Ausgabedatum: 25.11.2015

Abgabedatum: 2./3./4.12.2015

Aufgabe 22 (Votier) Erzwungene Schwingung und Resonanz 10 Punkte

In Aufgabe 21 haben Sie den eindimensionalen gedämpften harmonischen Oszillator kennengelernt. Die Differenzialgleichung lautete:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0\,.$$

Nun werde das System durch eine äußere Kraft $F_\mathrm{a}(t) = F_0\,\cos(\omega_\mathrm{a} t)$ angetrieben. Die Bewegungsgleichung ergibt sich damit zu:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m}\,\cos(\omega_\mathrm{a} t)\,. \tag{1}$$

Nach dem Einschwingvorgang schwingt das angeregte System mit der von außen vorgegebenen Frequenz ω_a, d.h.

$$x(t) = X(\omega_\mathrm{a})\,\cos(\omega_\mathrm{a} t + \phi(\omega_\mathrm{a})) \tag{2}$$

stellt eine Lösung dar.

(a) Ermitteln Sie $X(\omega_\mathrm{a})$ und $\phi(\omega_\mathrm{a})$. (6 Punkte)

Hinweise: Setzen Sie den Ansatz (2) in Gleichung (1) ein. Benutzen Sie Additionstheoreme für $\cos(\omega_\mathrm{a} t + \phi)$ und $\sin(\omega_\mathrm{a} t + \phi)$. Wieso müssen die Koeffizienten vor $\cos(\omega_\mathrm{a} t)$ und $\sin(\omega_\mathrm{a} t)$ verschwinden? Mit Hilfe der Bedingung, dass der Koeffizient vor $\sin(\omega_\mathrm{a} t)$ verschwinden muss, können Sie $\tan\phi$ bestimmen. Benutzen Sie

$$L(\omega_\mathrm{a}) = \sqrt{(2\gamma\omega_\mathrm{a})^2 + (\omega^2 - \omega_\mathrm{a}^2)^2}\,,$$

um damit $\sin\phi$ und $\cos\phi$ anzugeben.

Endergebnis:

$$X(\omega_\mathrm{a}) = \frac{F_0}{L(\omega_\mathrm{a})\,m}\,,$$

$$\phi(\omega_\mathrm{a}) = \arctan\left(\frac{-2\gamma\omega_\mathrm{a}}{\omega^2 - \omega_\mathrm{a}^2}\right)\,.$$

(b) Wie hängt die Amplitude X von der Frequenz ω_a ab? Was geschieht, wenn bei verschwindender Dämpfung die von außen vorgegebene Frequenz mit ω übereinstimmt? Skizzieren Sie $X(\omega_\mathrm{a})$. (2 Punkte)

(c) Wie hängt die Phasenverschiebung von der Frequenz ω_a ab? Skizzieren und interpretieren Sie $\phi(\omega_\mathrm{a})$. (2 Punkte)

Aufgabe 23 (Schriftlich) Der Apfel des Isaac Newton **12 Punkte**

(a) Gegeben sei ein Teilchen der Masse m, dessen Bewegung sich durch die Gleichung

$$m\ddot{x}(t) = -mg$$

beschreiben lässt (g=konst.). Welches physikalische System wird hierdurch wiedergegeben? Welche Bahnkurve erwarten Sie? Ist der Ansatz einer Exponentialfunktion gerechtfertigt? Berechnen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ dieser Differenzialgleichung. Wie lautet die homogene Lösung? Welcher physikalischen Realisierung entspricht diese? (4 Punkte)

(b) Im Falle einer geschwindigkeitsabhängigen Reibung verändere sich die Gleichung folgendermaßen:

$$m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) = -mg$$

(γ=konst.). Betrachten Sie die Differenzialgleichung für $v = \dot{x}(t)$. Berechnen Sie eine Lösung für den homogenen Fall und ermitteln Sie dann eine Partikulärlösung. Wie lautet damit die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung? (4 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die freien Konstanten für die Anfangsbedingungen $x(0) = h_0$ und $\dot{x}(0) = 0$ für die Resultate aus (a) und (b). Existiert eine maximal erreichbare Geschwindigkeit? (4 Punkte)

Aufgabe 24 (Votier) Lineare Differenzialgleichung höherer Ordnung **4 Punkte**

Bestimmen Sie die allgemeine komplexe Lösung der Differenzialgleichung

$$u''' - u'' + 2u = 0\,.$$

Benutzen Sie einen Exponentialansatz. Was liefert ein Potenzreihenansatz?

Aufgabe 25 (Votier) δ-Funktion **6 Punkte**

(a) Skizzieren Sie die Funktionen

$$f_1(x) = \frac{\epsilon/\pi}{x^2+\epsilon^2}\,, \quad f_2(x) = \frac{\sin(x/\epsilon)}{\pi x}\,, \quad f_3(x) = \frac{\Theta(x+\epsilon)-\Theta(x)}{\epsilon}$$

und begründen Sie, warum es plausibel erscheint, dass diese für $\epsilon \to 0$ (wobei $\epsilon > 0$) gegen die δ-Funktion konvergieren. Für $\Theta(x)$ gilt

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \geq 0\,, \\ 0 & \text{für} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

(3 Punkte)

(b) Berechnen Sie explizit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_i(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad i \in \{1,2,3\}\,.$$

Welche Werte erwarten Sie? (3 Punkte)
Hinweis: $\int_0^\infty \sin(x)/x\,\mathrm{d}x = \pi/2\,.$