Übungen zur Vorlesung **WS 2015/16**

Mathematische Methoden der Physik **Blatt 8**

Priv. Doz. Dr. Johannes Roth

Ausgabedatum: 2.12.2015

Abgabedatum: 9./10./11.12.2015

Aufgabe 26 (Votier) Eigenschaften der δ-Funktion — 7 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass für $a \neq 0$ gilt

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)\,.$$

Benutzen und beweisen Sie, dass man mit Hilfe einer geeigneten Substitution für eine Funktion $g(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\,\delta(ax)g(x) = \frac{1}{|a|}g(0)$$

erhält. (3 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass für $h'(x_i) \neq 0$ gilt

$$\delta(h(x)) = \sum_i \frac{1}{|h'(x_i)|}\delta(x - x_i)\ ,$$

wobei die Summe über alle einfachen Nullstellen x_i von h läuft, d.h. $h(x_i) = 0$. Gehen Sie dazu wie im Aufgabenteil (a) vor. Teilen Sie das Integral in sinnvolle Abschnitte um die Nullstellen von $h(x)$ (z.B. $\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{x_1-\epsilon}^{x_1+\epsilon} + \int_{x_2-\epsilon}^{x_2+\epsilon} + \dots$). Warum ist dies möglich? Transformieren Sie anschließend auf die Integrationsvariable $u = h(x)$. (4 Punkte)

Aufgabe 27 (Votier) Ableitungen der δ-Funktion — 8 Punkte

(a) Zeigen Sie mittels partieller Integration, dass man die Distribution $\delta'(x)$ mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x - x_0)\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

als Ableitung der δ-Funktion verstehen kann. (2 Punkte)

(b) Welches Ergebnis erhalten Sie für die zweite Ableitung der δ-Funktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta''(x - x_0)\,\mathrm{d}x\ ?$$

(3 Punkte)

(c) Schließen Sie daraus auf das Resultat für die n-te Ableitung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x - x_0)\,\mathrm{d}x\,.$$

Begründen Sie Ihre Aussage. (3 Punkte)

Aufgabe 28 (Schriftlich) Green'sche Funktion **9 Punkte**

Lösen Sie die Differenzialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y(x) + 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) + 2y(x) = x$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ und $y'(0) = 0$ auf dem Intervall $[0, 1]$ mit Hilfe einer Green'schen Funktion.

(a) Finden Sie zwei Fundamentallösungen $y_{1,2}(x)$ für die homogene Differenzialgleichung. Verwenden Sie dazu einen Exponentialansatz.

(b) Für eine Green'sche Funktion $G(x, z)$ gilt

$$L(x)\,G(x,z) = \delta(z - x) \tag{1}$$

mit dem Differenzialoperator $L(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + 2$. Benutzen Sie daher den Ansatz

$$G(x,z) = \begin{cases} A(z)\,y_1(x) + B(z)\,y_2(x) & \text{für} \quad x > z \\ C(z)\,y_1(x) + D(z)\,y_2(x) & \text{für} \quad x < z \end{cases} . \tag{2}$$

$G(x, z)$ muss denselben Anfangsbedingungen wie $y(x)$ genügen. Was folgt hieraus für C und D $(z > 0)$?

Nach Gleichung (1) gilt

$$\int_{z-\epsilon}^{z+\epsilon} \mathrm{d}x\, L(x)\,G(x,z) = \int_{z-\epsilon}^{z+\epsilon} \mathrm{d}x\,\delta(z - x)$$

Geben Sie die Sprung- und die Stetigkeitsbedingung an. Bestimmen Sie damit A, B, C und D.

(c) Zeigen Sie, dass die Lösung der Differenzialgleichung

$$L(x)\,y(x) = f(x)$$

mit $f(x) = x$ gegeben ist durch

$$y(x) = \int_0^1 G(x,z)f(z)\mathrm{d}z = \int_0^x G(x,z)f(z)\mathrm{d}z + \int_x^1 G(x,z)f(z)\mathrm{d}z\,.$$

Berechnen Sie diese.