Übungen zur Vorlesung **WS 2015/16**
Mathematische Methoden der Physik **Blatt 9**
Priv. Doz. Dr. Johannes Roth Ausgabedatum: 9.12.2015
Abgabedatum: 16./17./18.12.2015

Aufgabe 29 (Votier) Partielle Ableitungen 9 Punkte

(a) Gegeben ist die Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \exp\left(-(x^2+2y^2)\right) .$$

- Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$$\partial_x f \ , \quad \partial_y f \ , \quad \partial_y \partial_x f \ , \quad \partial_x \partial_y f \ .$$

Zeigen Sie am gegebenen Beispiel durch den Vergleich von $\partial_y \partial_x f$ und $\partial_x \partial_y f$, dass die Reihenfolge der Ableitungen nicht relevant ist. (3 Punkte)

- Zeichnen Sie Niveaulinen für $f =$ konst. in der x-y-Ebene und die Funktion $f(x,y)$ im $\mathbb{R}^3$. Wo liegen Punkte mit $x =$ konst. bzw. $y =$ konst.? Skizzieren und interpretieren Sie $\partial_x f$. (3 Punkte)

(b) Berechnen Sie für die Funktion

$$g(x,y,z) = -\frac{1}{r} \qquad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

die partiellen Ableitungen

$$\partial_x g \ , \quad \partial_y g \ , \quad \partial_z g$$

und bestimmen Sie

$$\triangle g = (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) g \ .$$ (3 Punkte)

Aufgabe 30 (Votier) Kettenregel 6 Punkte

Untersuchen Sie die Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} I(x)$ der Funktion

$$I(x) = \int_x^{x^2} \frac{\sin(xt)}{t} \, \mathrm{d}t \, .$$

(a) Führen Sie dazu zunächst die Funktion

$$F(v,w,x) = \int_w^v \frac{\sin(xt)}{t} \, \mathrm{d}t$$

ein und berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$$\partial_v F(v,w,x) \ , \quad \partial_w F(v,w,x) \quad \text{und} \quad \partial_x F(v,w,x) \, .$$ (3 Punkte)

(b) Setzen Sie nun $v(x) = x^2$ und $w(x) = x$, so dass wir $F(v(x), w(x), x) = I(x)$ erhalten. Berechnen Sie mit der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \partial_v F \, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \partial_w F \, \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} + \partial_x F$$

die totale Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} I(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(v(x), w(x), x) \; .$$

(3 Punkte)

Aufgabe 31 (Schriftlich) Vollständiges Differenzial — 10 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass das Differenzial

$$\mathrm{d}f = -(y + x)\mathrm{d}x + \frac{x^2}{y}\mathrm{d}y$$

nicht vollständig ist. (2 Punkte)

(b) Bilden Sie nun das Differenzial

$$\mathrm{d}g = \frac{1}{xy}\,\mathrm{d}f = -\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x + \frac{x}{y^2}\mathrm{d}y$$

und zeigen Sie, dass dieses vollständig ist. (2 Punkte)

(c) Berechnen Sie die Funktion $g(x, y)$. Integrieren Sie dazu den Term $-\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$, der $\partial_x g$ entspricht. Die so ermittelte Funktion $g(x, y)$ muss $\partial_y g = x/y^2$ erfüllen. (3 Punkte)

(d) Berechnen Sie die Funktion $g(x, y)$, indem Sie die Beziehung $\partial_y g = \frac{x}{y^2}$ integrieren. Beachten Sie, dass eventuell auftretende Integrationskonstanten von x abhängen dürfen. Welche Forderung ergibt sich aus dem vollständigen Differenzial? (3 Punkte)