Übungen zur Vorlesung **WS 2015/16**

Mathematische Methoden der Physik **Blatt 10**

Apl. Prof. Dr. Johannes Roth

Ausgabedatum: 16.12.2015

Abgabedatum: 13./14./15.1.2016

Aufgabe 32 (Votier) Mehrdimensionale Integrale **10 Punkte**

(a) Zeigen Sie, dass für $x, y > 0$ gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \ . \qquad \text{(3 Punkte)}$$

(b) Berechnen Sie

$$I_1 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \cdots = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} \mathrm{d}x = \ldots \ . \qquad \text{(3 Punkte)}$$

(c) Ermitteln Sie

$$I_2 = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y \, . \qquad \text{(3 Punkte)}$$

(d) Gilt $I_1 = I_2$? Begründen Sie das Resultat. (1 Punkt)

Hinweise:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arctan(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Aufgabe 33 (Votier) Gebietsintegrale **8 Punkte**

(a) Integrieren Sie

$$\int_A e^{x+y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = I_3 \ .$$

A ist die Fläche des Dreiecks mit den Ecken $(x = 0, y = 0)$, $(0, 2)$ und $(1, 0)$. Fertigen Sie zunächst eine Skizze an, in der Sie das Integrationsgebiet in der x-y-Ebene darstellen. Wie lauten demnach die Integralgrenzen? (4 Punkte)

Hinweis: Endergebnis $I_3 = \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} + 1$

(b) Gehen Sie beim Integral

$$\int_{A'} x^2 y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = I_4$$

wie in Teilaufgabe (a) vor. A' ist das Gebiet, das von der Parabel $y = x^2$ und der Geraden durch die Punkte $(-1, 1)$ und $(2, 4)$ eingeschlossen wird. (4 Punkte)

Hinweis: Endergebnis $I_4 = \frac{531}{70}$

Aufgabe 34 (Schriftlich) Kugelsymmetrische Funktionen **12 Punkte**

In der Physik werden häufig Volumenintegrale über kugelsymmetrische Funktionen benötigt. Kugelsymmetrisch bedeutet, dass die Funktion $f(x, y, z)$ nur eine Funktion des Abstands vom Ursprung $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist:

$$f(x, y, z) = g(r(x, y, z)) = g(r) \,.$$

Im Folgenden soll das Volumen-Integral

$$I = \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y \int \mathrm{d}z \; f(x, y, z)$$

in ein gewöhnliches eindimensionales Integral über $g(r)$ umgewandelt werden. Wir nehmen dabei an, dass der Integrationsbereich ebenfalls kugelsymmetrisch ist, d.h. es wird über eine Vollkugel, eine Kugelschale oder den gesamten Raum integriert.

(a) Zunächst führen wir die Transformation auf Kugelkoordinaten durch:

$$I = \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; g(r)\, J(r, \theta, \varphi) \,.$$

Für eine Vollkugel mit Radius R ist $r_1 = 0, r_2 = R$. Um über den gesamten Raum zu integrieren, setzt man $r_1 = 0, r_2 = \infty$. Berechnen Sie die Jacobi-Determinante $J(r, \theta, \varphi)$ für Kugelkoordinaten (siehe Vorlesung 6.15). (4 Punkte)

(b) Führen Sie die Integration über die beiden Winkelkoordinaten θ und φ aus, um auf folgende Form zu kommen:

$$I = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}r \; g(r) \; r^2 \,. \tag{1}$$

(2 Punkte)

(c) Verwenden Sie Gleichung (1), um das Volumen einer Vollkugel mit Radius R zu berechnen. (1 Punkt)

(d) Verwenden Sie Gleichung (1), um die Gesamtmasse der Erdatmosphäre abzuschätzen. Die Dichte der Erdatmosphäre im Abstand r vom Erdmittelpunkt (für $r \geq R_\mathrm{E}$) kann näherungsweise über die barometrische Höhenformel ausgedrückt werden:

$$\rho(r) = \rho_0 \,\mathrm{e}^{-\frac{r - R_\mathrm{E}}{r_s}} \,.$$

Dabei ist $R_\mathrm{E} \approx 6400$ km der Erdradius, $\rho_0 \approx 1.2$ kg m^{-3} die Luftdichte auf Meereshöhe (bzw. bei $r = R_\mathrm{E}$) und $r_s \approx 8.4$ km eine Länge, die sich aus Temperatur, Gaskonstante, molarer Masse und Gravitationskonstanten zusammensetzt. Um die Gesamtmasse zu bestimmen, muss die Dichte über das gesamte Atmosphärenvolumen integriert werden. Überlegen Sie sich sinnvolle Grenzen r_1 und r_2. Transformieren Sie das Integral auf die dimensionslose Variable $u \equiv \frac{r}{r_s}$. Zeigen und benutzen Sie

$$\int_a^{\infty} \mathrm{d}u \; u^2 e^{-u} = (a^2 + 2a + 2)\, e^{-a}.$$ (5 Punkte)

Der Literaturwert beträgt $M = 5.15 \cdot 10^{18}$ kg.