Übungen zur Vorlesung **WS 2015/16**

Mathematische Methoden der Physik **Blatt 11**

Apl. Prof. Dr. Johannes Roth

Ausgabedatum: 13.1.2016

Abgabedatum: 20./21./22.1.2016

Aufgabe 35 (Votier) Oberfläche einer Kugel — 5 Punkte

Eine Fläche ist ein zweidimensionales Objekt und lässt sich, auch wenn sie gekrümmt ist, durch zwei Parameter beschreiben. In Kugelkoordinaten erhält man z.B. die gesamte Oberfläche einer Kugel, indem man die Koordinate $r = R$ konstant hält, wobei R der Radius der Kugel ist, und alle möglichen Werte für die beiden Winkel ϑ und φ einsetzt.

- Was folgt aus Aufgabe 34 (b) für den Flächeninhalt der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R in Kugelkoordinaten?
- Berechnen Sie diesen Flächeninhalt erneut gemäß

$$\int_A \mathrm{d}A = \int_A \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} \right| \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi \,.$$

Aufgabe 36 (Votier) Ableitungen von Vektor- und Skalarfeldern — 6 Punkte

(a) Betrachten Sie Polarkoordinaten, die durch

$$\mathbf{r}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Zeichnen Sie in der (r, φ)- und der (x, y)-Ebene die Linien für $r = 1, 2, 3$ und $\varphi = 0, \pi/4, \pi/2$ ein. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\mathbf{e}_r = \partial_r \mathbf{r}$ und $\tilde{\mathbf{e}}_\varphi = \partial_\varphi \mathbf{r}$. Zeigen Sie, dass diese Vektoren in jedem Punkt senkrecht aufeinander stehen. Berechnen Sie den Betrag von $\mathbf{e}_r$ und $\tilde{\mathbf{e}}_\varphi$. (4 Punkte)

(b) Ermitteln Sie den Gradienten $\nabla U(x, y, z)$ für die Skalarfelder

$$U = x + 2y + 3z \qquad \text{und} \qquad U = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right) .$$ (2 Punkte)

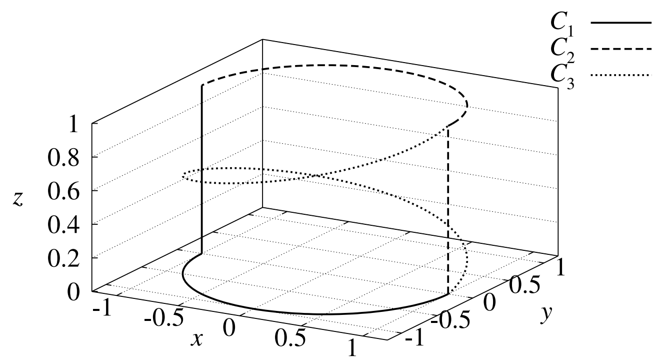
Aufgabe 37 (Votier) Linienintegrale in zwei Dimensionen — 4 Punkte

Betrachten Sie die parabelförmige Linie C mit $x(t) = t$, $y(t) = t^2$ und $t \in [0, 1]$. Berechnen Sie die Linienintegrale

$$I_1 = \int_C \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \,, \qquad \boldsymbol{I}_2 = \int_C xy \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} \,, \qquad I_3 = \int_C \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2}} \, \mathrm{d}s \,,$$

wobei s die Bogenlänge ist.

Aufgabe 38 (Schriftlich) Arbeitsintegral in drei Dimensionen **10 Punkte**



(a) Betrachten Sie die drei Wege C_1, C_2 und C_3 entlang der Außenhülle eines Zylinders mit dem Radius $R = 1$ und der Höhe $h = 1$, dessen Mittelpunkt der Grundfläche im Ursprung des Koordinatensystems liegt:

- Der Weg C_1 führt vom Punkt $(x = 1, y = 0, z = 0)$ entlang des vorderen, unteren Kreisbogens zum Punkt $(-1, 0, 0)$ und anschließend senkrecht nach oben zu $(-1, 0, 1)$.
- Der zweite Weg C_2 führt von $(1, 0, 0)$ senkrecht nach oben zu $(1, 0, 1)$ und dann entlang des hinteren, oberen Kreisbogens zu $(-1, 0, 1)$.
- Ausgehend von $(1, 0, 0)$ führt der Weg C_3 mit konstanter Steigung pro Winkel ein Mal um den Zylindermantel zu $(1, 0, 1)$.

Geben Sie eine Parametrisierung der drei Wege an. Beachten Sie den Umlaufsinn.
(5 Punkte)

(b) Berechnen Sie für das Kraftfeld

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{e}_z$$

die Arbeitsintegrale

$$A_i = \int_{C_i} \boldsymbol{F}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

entlang der Wege C_1, C_2 und C_3. (3 Punkte)

(c) Kombinieren Sie die Wege C_1 und C_2 zu einem geschlossenen Weg und geben Sie das Ergebnis der Arbeitsintegrale über diese Kombination für $\boldsymbol{F}$ an. Sie müssen dafür keine neue Integration durchführen. Begründen Sie das Ergebnis. (2 Punkte)