Übungen zur Vorlesung **WS 2015/16**
Mathematische Methoden der Physik **Blatt 12**
Apl. Prof. Doz. Dr. Johannes Roth
Ausgabedatum: 20.1.2016
Abgabedatum: 27./28./29.1.2016

Aufgabe 39 (Votier) Kugelkoordinaten — 9 Punkte

Eine Bahnkurve sei durch die Kugelkoordinaten $r(t), \vartheta(t), \varphi(t)$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Orthonormalsystem bilden. Skizzieren Sie diese Vektoren sowie den Ortsvektor $\mathbf{r} = r(t)\,\boldsymbol{e}_r(t)$ für einen Zeitpunkt $t = t_0$. Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\, r(t)\,\boldsymbol{e}_r(t)\,\right)$$

und drücken Sie ihn in der Basis $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\vartheta$, $\boldsymbol{e}_\varphi$ aus.

Aufgabe 40 (Votier) Divergenz und Rotation — 16 Punkte

(a) Gegeben sei das Potenzial

$$V_1(r) = \frac{1}{2}Dr^2 = \frac{1}{2}D|\boldsymbol{r}|^2 = \frac{1}{2}D(x^2+y^2+z^2)$$

mit der Konstanten D. Berechnen Sie den Kraftvektor

$$\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r}) = -\nabla V_1(r) \qquad \text{mit} \qquad \nabla = \mathbf{e}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Skizzieren Sie das Vektorfeld $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r})$ in der x-y-Ebene ($z = 0$). Ermitteln Sie $\nabla \cdot \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r})$ und $\nabla \times \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{r})$. (4 Punkte)

(b) Skizzieren Sie das Vektorfeld

$$\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{r}) = D\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

in der x-y-Ebene ($z = 0$). Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation von $\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{r})$ wie in Aufgabenteil (a). Besitzt das Vektorfeld ein Potenzial $V_2(r)$? (4 Punkte)

(c) $\mathcal{C}$ sei der positiv orientierte Kreis mit Radius R in der x-y-Ebene um den Koordinatenursprung:

$$\mathcal{C} : \varphi \to R\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi)\,.$$

Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$A_i = \int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,.$$

Wurde Arbeit entlang des Weges verrichtet? (4 Punkte)

(d) Benutzen Sie den Satz von Stokes, um die Integrale A_i zu ermitteln. (4 Punkte)

Aufgabe 41 (Schriftlich) Zylinderkoordinaten **17 Punkte**

Mit

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

ergibt sich in kartesischen Koordinaten für den Laplaceoperator

$$\Delta f(x,y,z) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \cdot (\nabla f) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f$$

und für die Rotation

$$\nabla \times \mathbf{F}(x,y,z) = \operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

mit $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{e}_x F_x + \mathbf{e}_y F_y + \mathbf{e}_z F_z$.

(a) Verifizieren Sie, dass die Vektoren

$$\boldsymbol{e}_\varrho = \cos\varphi\, \mathbf{e}_x + \sin\varphi\, \mathbf{e}_y\,, \quad \boldsymbol{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \mathbf{e}_x + \cos\varphi\, \mathbf{e}_y\,, \quad \boldsymbol{e}_z$$

ein Orthonormalsystem bilden. Skizzieren Sie diese für einen Punkt

$$\mathbf{r} = \varrho\, \boldsymbol{e}_\varrho + z\, \boldsymbol{e}_z$$

auf einem Zylinder. Ermitteln Sie $\boldsymbol{e}_\varrho \times \boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_\varrho \times \boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{e}_\varphi \times \boldsymbol{e}_z$, $\frac{\partial \mathbf{e}_\varrho}{\partial \varphi}$ und $\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi}$. (7 Punkte)

(b) Es sei nun

$$\tilde{\nabla} = \mathbf{e}_\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Berechnen Sie $\tilde{\nabla} g(\varrho, \varphi, z)$ und $\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\nabla} g)$. Beachten Sie die Produktregel und die Orthogonalität der Vektoren $\boldsymbol{e}_\varrho(\varphi)$, $\boldsymbol{e}_\varphi(\varphi)$ und $\boldsymbol{e}_z$. (5 Punkte)

(c) Ermitteln Sie

$$\tilde{\nabla} \times \mathbf{G}(\varrho, \varphi, z) = \boldsymbol{e}_\varrho(\cdots) + \boldsymbol{e}_\varphi(\cdots) + \boldsymbol{e}_z(\cdots)$$

mit $\mathbf{G}(\varrho,\varphi,z) = \mathbf{e}_\varrho G_\varrho + \mathbf{e}_\varphi G_\varphi + \mathbf{e}_z G_z$. Was ergibt sich für $\mathbf{G} = \varrho \mathbf{e}_\varphi$? (5 Punkte)

Anmerkungen: Der Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten ist gegeben durch

$$\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Für die Rotation gilt

$$\operatorname{rot} \mathbf{G} = \mathbf{e}_\varrho \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial G_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial G_\varphi}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\varphi \left(\frac{\partial G_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial \varrho} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial G_\varphi}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial G_\varrho}{\partial \varphi} + \frac{G_\varphi}{\varrho} \right)\,.$$