**Übungen zur Vorlesung** **WS 2015/16**
**Mathematische Methoden der Physik** **Blatt 13**
Apl. Prof. Dr. Johannes Roth Ausgabedatum: 27.1.2016
Abgabedatum: 3./4./5.2.2016

## Aufgabe 42 (Votier) Differenzialoperatoren 6 Punkte

(a) Die Funktion

$$f = \mathrm{e}^{-\varrho^2}$$

ist in **Zylinderkoordinaten** $(\varrho, \varphi, z)$ gegeben. Geben Sie $\nabla$ und $\Delta$ in Zylinderkoordinaten an und berechnen Sie damit $\nabla f$ und $\Delta f$. (3 Punkte)

(b) Die Funktion

$$g = \frac{\cos\vartheta}{r^2} \quad \left(= \frac{z}{r^3}\right)$$

ist in **Kugelkoordinaten** $(r, \vartheta, \varphi)$ gegeben. Geben Sie $\nabla$ und $\Delta$ in Kugelkoordinaten an und berechnen Sie damit $\nabla g$ und $\Delta g$. (3 Punkte)

## Aufgabe 43 (Votier) Integralsätze von Stokes und Gauß 11 Punkte

(a) Berechnen Sie für das in Kugelkoordinaten gegebene Vektorfeld

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$$

das Oberflächenintegral $I_O$ und das Volumenintegral $I_V$, wobei $V$ das Volumen einer Kugel mit Radius $R$ um den Ursprung und $\partial V$ die Oberfläche dieser Kugel sind.

$$I_O = \int_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}\,, \qquad I_V = \int_V \operatorname{div} \boldsymbol{F} \mathrm{d}V$$

Berechnen Sie beide Integrale explizit und begründen Sie, warum das eigentlich nicht notwendig wäre. (5 Punkte)

*Hinweis:* $\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\vartheta} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\varphi}\right) \mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi = R^2 \sin\vartheta \boldsymbol{e}_r \,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$ (siehe Aufgabe 35)

(b) Bestimmen Sie für den Kraftvektor

$$\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{e}_y$$

das Arbeitsintegral $W$ für einen geschlossenen, in positiver Richtung durchlaufenen Kreis $C$ in der $x$-$y$-Ebene um den Punkt $(2, 0, 0)$ mit dem Radius $R = 1$. Berechnen Sie ebenfalls das Flächenintegral $W_A$, wobei $A$ die Fläche des beschriebenen Kreises ist, deren Normalenvektor in Richtung der positiven $z$-Achse zeigt.

$$W = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,, \qquad W_A = \int_A \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A}$$

Berechnen Sie beide Integrale. Welchen Wert erwarten Sie für $W - W_A$? (6 Punkte)

*Hinweise:* Bestimmen Sie $\boldsymbol{r}$ und $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$ bzw. $\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\varrho} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\varphi}\right) \mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,.$

**Aufgabe 44 Fourierreihe** **4 Bonuspunkte**

Zeichnen Sie die Funktion

$$f(x) = x^2$$

im Bereich $-\pi < x < \pi$. Diese werde nun $2\pi$-periodisch fortgesetzt. Berechnen Sie die zugehörige Fourierreihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right) .$$

Geben Sie mit Hilfe von $f(0)$ den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \dots$$

an.

**Aufgabe 45 Fouriertransformation** **2 Bonuspunkte**

Die Funktion $g(x)$ besitze die Fouriertransformierte $\hat{g}(k)$. Zeigen Sie, dass eine Translation zu einer Phasenverschiebung im Fourierraum führt. Berechnen Sie hierzu die Fouriertransformierte von

$$h(x) = g(x - a) .$$