Mathematische Methoden der Physik (Wiederholungsübung)

Priv. Doz. Dr. Johannes Roth *WS 2010/2011*

1. Differential- und Integralrechnung

(a) Berechne folgende Ableitungen

$$\frac{d}{dx}\exp(-x^2), \quad \frac{d}{dx}(1+x^2)^\nu, \quad \frac{d}{dx}\tan(x)\tanh(x), \quad \frac{d}{dx}\log\left(\frac{x}{\exp(x)-1}\right) \tag{1}$$

(b) Berechne folgende unbestimmte Integrale

$$\int dx\,(2{-}3x)^4, \quad \int dx\,3x^2 e^{x^3}, \quad \int dx\,2x\cot x^2 \quad \int dx\,e^x \sin x, \quad \int dx\,\frac{\cos^3 x}{1-\sin x}$$

(c) Berechne die totale Ableitung

$$\frac{d}{d\lambda}\int_0^\lambda dx\frac{e^{-\lambda\,x^2}-1}{x}, \tag{2}$$

Hinweis: Benutze die Kettenregel für partielle Ableitungen. Das Integral nach der Ableitung kann berechnet werden.

2. Vektoranalysis

(a) Betrachte das Skalarfeld

$$\phi(x,y,z) = \exp(x)\cos(y) + z. \tag{3}$$

Berechne von diesem Skalarfeld den Gradienten, und zeige, dass der Laplace Operator verschwindet, d.h., $\Delta\phi = 0$.

(b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x(4-2a)+y(a-3)+xy(8x-4ax) \\ x(3a-5)+y(4-2a)+xy(8y-4ay) \\ 0 \end{pmatrix} e^{-(x^2+y^2)}, \tag{4}$$

mit dem reellen Parameter a. Bestimme den Parameter a, so dass $\mathbf{A}$ ein Gradientenfeld wird. (D.h., das Vektorfeld lässt sich schreiben als $\mathbf{A}(x,y,z) = \nabla\psi(x,y,z)$.) Wie sieht das Skalarfeld $\psi(x,y,z)$ aus?

3. Gewöhnliche Differentialgleichung

(a) Bestimme die allgemeine (komplexe) Lösung der homogenen Differentialgleichung
$$\left[\frac{d^3}{dx^3} + 2\frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx}\right] y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

(b) Finde eine Lösung, die die Anfangsbedingungen $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$ und $y''(0) = 0$ erfüllt. Gib eine Darstellung der Lösung an, in der außer der reellen Exponentialfunktion nur trigonometrische Funktionen vorkommen.

(c) Finde nun eine (andere) Lösung zu den Bedingungen $y(0) = 2$, $y'(0) = -1 + i$, $y(\pi) = 1 - e^{-\pi}$. Wähle eine Form der Lösung in der außer Konstanten ausschließlich die komplexe Exponentialfunktion vorkommt. Skizziere qualitativ, wie die hier gefundene Lösung $y(x)$ von $x = 0$ bis $x \to \infty$ in der komplexen Ebene verläuft.

(d) Betrachte nun die inhomogene Differentialgleichung
$$\left[\frac{d^3}{dx^3} + 2\frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx}\right] y(x) = x^2 + \cos(x). \tag{6}$$
Gib ihre allgemeine (komplexe) Lösung an.

4. Fläche und Volumen

(a) Berechne den Flächeninhalt A der Fläche, die von den Funktionen
$$y_1(x) = x^2 + 2x + 1, \tag{7}$$
$$y_2(x) = 3x + 1 \tag{8}$$
eingeschlossen wird. Bestimme die x- und die y-Komponente des Schwerpunkts durch die Integrale
$$s_x = \frac{1}{A}\int_A dx\,dy\,x, \qquad s_y = \frac{1}{A}\int_A dx\,dy\,y. \tag{9}$$

(b) Berechne das Volumen, das von der $z = 0$-Ebene (x-y-Ebene) und der Fläche $x^2 + y^2 + z = 1$ eingeschlossen wird.

(c) Berechne die gesamte Oberfläche des in (b) beschriebenen Volumens. Gib für die ganze Oberfläche eine explizite Rechnung durch Oberflächenintegrale an. Es bietet sich an, die Rechnung in zwei Abschnitten durchzuführen.

5. Fourierreihen

(a) Berechne die Fourierreihe und die Fourierkoeffizienten der Funktion
$$f(x) = \exp(x), \qquad 0 < x < 2\pi. \tag{10}$$

(b) Für die periodische Funktion $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n)\exp(ik_n x)$ seien die Fourierkoeffizienten $\hat{g}(n)$ bekannt. Bestimme daraus die Fourierkoeffizienten der Funktion $h(x) = g(x)\cos(2\pi x/L)$.