1 Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

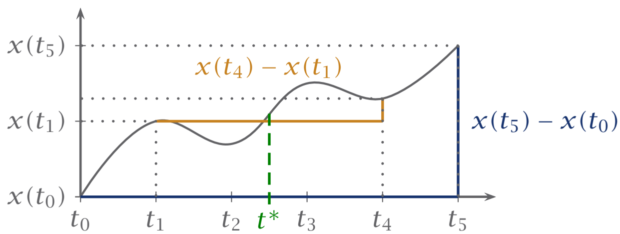
Differential- und Integralrechnung werden unter dem Begriff *Infinitesimalrechnung* zusammengefasst und bilden einen wichtigen Bestandteil der Analysis.

1.1 Differentialrechnung

1.1.1 Notwendigkeit und Definition der Ableitung

a) Beispiel

Wir betrachten eine Trajektorie eines Teilchens über einen gewissen Zeitraum. Aus den gesammelten Daten erstellen wir ein Ort-Zeit-Diagramm $x(t)$ des Teilchens. Wie schnell war das Teilchen?



Wir ermitteln die Durchschnittsgeschwindigkeit:

$$\overline{v} = \frac{x(t_5) - x(t_0)}{t_5 - t_0} \tag{1.1a}$$

Um zu erfahren, wie schnell das Teilchen zur Zeit t^* war verkleinern wir die Steigungsdreiecke:

$$\overline{v_1} = \frac{x(t_4) - x(t_1)}{t_4 - t_1}, \quad \overline{v_2} = \frac{x(t_3) - x(t_2)}{t_3 - t_2} \tag{1.1b}$$

Die Gleichungen (1.1a) und (1.1b) haben die Form

$$\overline{v_t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{1.2a}$$

Wollen wir die Momentangeschwindigkeit wissen, müssen wir den (zeitlichen) Abstand zwischen beiden Punkten gegen 0 gehen lassen.

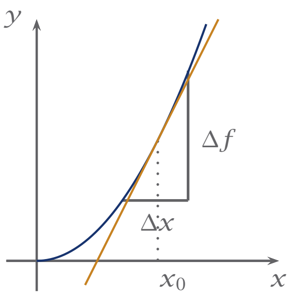
$$v_{t^*} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t^* + \Delta t) - x(t^*)}{\Delta t} \tag{1.2b}$$

b) Definition

Die *Ableitung* beschreibt, wie sich eine Funktion $f(x)$ in Abhängigkeit von ihrem Argument x ändert. Sie ist über den *Differentialquotient*

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.3}$$

definiert. Die Funktion $f(x)$ heißt *differenzierbar*, wenn dieser Grenzwert existiert.



Als *Tangente* bezeichnen wir eine Gerade, die die Funktion im Punkt x_0 berührt und dort die Steigung $f'(x_0)$ hat.

c) Höhere Ableitung

Höhere Ableitungen folgen dem gleichen Schema.

Frage: Wie ändert sich $f'(x)$ mit x?

Antwort:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f'(x)$$
$$\overset{(1.3)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \tag{1.4a}$$

Sofern die Grenzwerte existieren, lassen sich Ableitungen beliebiger Ordnung n bilden:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x) = f^{(n)}(x) \underset{(1.4a)}{\overset{(1.3)}{=}} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x} \tag{1.4b}$$

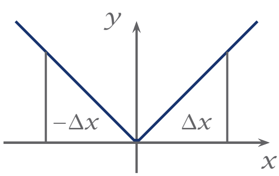
1.1.2 Wichtige Ableitungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = n x^{n-1} \tag{1.5a}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{ax} = a e^{ax} \tag{1.5b}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(ax) = \frac{1}{x} \tag{1.5c}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(ax) = a \ \cos(ax) \tag{1.5d}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos(ax) = -a \ \sin(ax) \tag{1.5e}$$

Beispiel für eine Funktion, die nicht überall differenzierbar ist: $f(x) = |x|$
Betrachte $x = 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-\Delta x) - f(0)}{-\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|-\Delta x| - 0}{-\Delta x} = -1$$

Das heißt, der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert sind verschieden und somit existiert die Ableitung nicht im Punkt $x = 0$. Im Schaubild drückt sich das durch einen Knick aus.



1.1.3 Differentiationsregeln

a) Produkte von Funktionen

Betrachte $f(x) = u(x)\, v(x)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) &\overset{(1.3)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\, v(x+\Delta x) - u(x)\, v(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\, v(x+\Delta x) - u(x+\Delta x)\, v(x) + u(x+\Delta x)\, v(x) - u(x)\, v(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(u(x+\Delta x) \underbrace{\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}}_{=v'(x)} + \underbrace{\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}}_{=u'(x)} v(x) \right) \\
&= u(x)\, v'(x) + u'(x)\, v(x)
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

b) Verkettete Funktionen

Betrachte $f(g(x))$, führe ein:

$$
\Delta g = g(x+\Delta x) - g(x) \tag{1.7a}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} &\overset{(1.3)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \\
&\overset{(1.7a)}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(g+\Delta g) - f(g)}{\Delta x} \frac{\Delta g}{\Delta g} \right) \\
&= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta g \to 0}} \left(\frac{f(g+\Delta g) - f(g)}{\Delta g} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\Delta g \to 0} \frac{f(g+\Delta g) - f(g)}{\Delta g} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{\mathrm{d}f(g(x))}{\mathrm{d}g} \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Beispiele:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x\ \sin(x) \\
f'(x) &= \sin(x) + x\ \cos(x) \\
g(x) &= e^{-x^2} \\
g'(x) &= -2\,xe^{-x^2}
\end{aligned}
$$

c) Quotienten von Funktionen

Quotientenregel:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{f(x)}{g(x)} &\overset{(1.6)}{=} \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&\overset{(1.8)}{=} \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x)\frac{1}{g(x)^2}g'(x) \\
&= \frac{f'(x)\ g(x) - f(x)\ g'(x)}{g(x)^2} \qquad (1.9)
\end{aligned}
$$

d) Umkehrfunktion

Sei $y = f(x)$. Dann lautet die Umkehrfunktion: $x = f^{-1}(y)$.

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f^{-1}(y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad (1.10)
$$

Zusammenfassung:

Produktregel:	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)v(x)$	$=$	$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
Kettenregel:	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(v(x))$	$=$	$u'(v(x))v'(x)$
Quotientenregel:	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{u(x)}{v(x)}$	$=$	$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

1.2 Integralrechnung

Die *Integration* ist die Umkehrung der Differentiation.