Variation der Konstanten

Betrachte die inhomogene DGL

$$y'' + \alpha y' + \beta y = g(x) \qquad \alpha, \beta \text{ const} \qquad (5.35)$$

Bekannt sei die homogene Lösung mit $y_1(x)$ und $y_2(x)$

Als Ansatz für eine partikuläre Lösung nehmen wir

$$y_p = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x) \qquad (5.36)$$

Eingesetzt in (5.35) ergibt sich (einige Terme fallen weg, da y_1 und y_2 die homogene Gleichung lösen.

$$\alpha(u_1' y_1 + u_2' y_2) + u_1'' y_1 + 2u_1' y_1' + u_2'' y_2 + 2u_2' y_2' = 0 \qquad (5.37)$$

$$\Leftrightarrow \alpha(u_1' y_1 + u_2' y_2) + (u_1' y_1 + u_2' y_2)' + u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x)$$

Verschwindet die erste Klammer, so auch die zweite.

Wir suchen also eine Lösung, für die gilt:

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' &= g \end{aligned} \qquad (5.38)$$

Der letzte Term ist der Rest von Gl. (5.37)

Setzen wir $W(x) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$, so ergibt sich als Lösung des Gleichungssystems

$$u_1' = -y_2 \frac{g(x)}{W(x)}, \quad u_2' = y_1 \frac{g(x)}{W(x)} \qquad (5.39)$$

und $u_1(x)$ und $u_2(x)$ durch Integration.

Bsp: $y'' - 6y' + 9y = (3+x)e^{3x}$

Lsg der homogenen Gleichung: Ansatz $y = e^{\lambda x}$

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 3$$

Homogene Lösung $\quad y_1(x) = e^{3x} \quad y_2(x) = xe^{3x}$

Ansatz für inhomogene Lösung: $y_p(x) = u_1(x)\, e^{3x} + u_2(x)\, xe^{3x}$

Einsetzen in (5.38) ergibt:

$$e^{3x} u_1' + x\, e^{3x} u_2' = 0$$

$$3e^{3x} u_1' + (1+3x)\, e^{3x} u_2' = (3+x)\, e^{3x}$$

Mit $W(x) = e^{6x}$ folgen die Lösungen:

$$u_1 = -\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}, \quad u_2 = 3x + \frac{x^2}{2}$$

Damit $y_p(x) = \left(\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2}\right) e^{3x}$

Und als allgemeine Lösung:

$$y(x) = \left(c_1 + c_2 x + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) e^{3x}$$

d.h. wenn wir $G(x,z)$ bestimmt haben, können wir für jede beliebige Inhomogenität $b(x)$ die Lösung einfach nach (5.30) berechenen. Dies gilt nur für die Lösung im Intervall $a \leq x \leq b$.

Versuch: Einsetzen (5.30) in (5.19)

$$\int_a^b \underbrace{\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i} G(x,z)}_{\delta(z-x)} \, b(z)\,\mathrm{d}z = b(x),$$

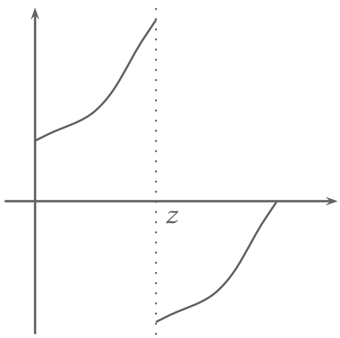
falls das der δ-Funktion entspricht ist die Gleichheit erfüllt.

Wir sehen also $G(x,z)$ muss Lösung sein von

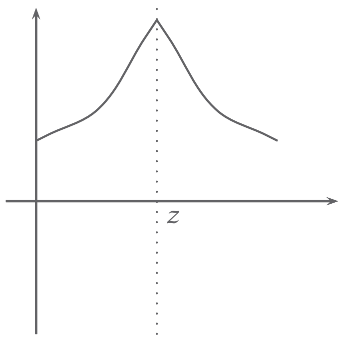
$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i} G(x,z) = \delta(z-x) \tag{5.31}$$

Weiterhin muss $G(x,z)$ folgende Bedingungen erfüllen:

- $G(x,z)$ muss so gewählt sein, dass $y(x)$ die gewünschten Rand- oder Anfangswerte erfüllt. Also, wenn $y(x_j) = 0$ für bestimmte x_j, dann auch $G(x_j,z) = 0$.
- Gleichung (5.31) lässt sich nur erfüllen, wenn $\frac{\mathrm{d}^N}{\mathrm{d}x^N} G(x,z)\Big|_{x=z} \to \infty$, bei den niedrigeren Ableitungen macht das keinen Sinn.
- Das ist möglich, wenn die Ableitungen wie folgt aussehen:



$\frac{\mathrm{d}^{N-1}}{\mathrm{d}x^{N-1}} G(x,z)$ hat einen *Sprung* bei $x = z$.



$\frac{\mathrm{d}^{N-2}}{\mathrm{d}x^{N-2}} G(x,z)$ hat einen *Knick* bei $x = z$.

Alle niedrigen Ableitungen sind bei $x = z$ differenzierbar und somit auch stetig.

Die Bedingungen können verwendet werden um $G(x, z)$ zu bestimmen, denn berechne:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon}\sum_{i=0}^{N} a_i\,\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}G(x,z)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon}\delta(z-x)\,\mathrm{d}x\\ &= 1\end{aligned}$$

Linke Seite:

$$\begin{aligned}&a_N\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\mathrm{d}^{N-1}}{\mathrm{d}x^{N-1}}G(z+\varepsilon,z)-\frac{\mathrm{d}^{N-1}}{\mathrm{d}x^{N-1}}G(z-\varepsilon,z)\right] && (N\text{-ter Term})\\ &+\underbrace{\sum_{i=1}^{N-1} a_i\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}x^{i-1}}G(z+\varepsilon,z)-\frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}x^{i-1}}G(z-\varepsilon,z)\right]}_{=0,\text{ weil stetig}} && \begin{pmatrix}N-1\text{-ter bis}\\ 1\text{-ter Term}\end{pmatrix}\\ &+\underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0}a_0G(z,z)\varepsilon}_{=0} && (0\text{-ter Term})\end{aligned}$$

Es bleibt übrig:

$$a_N\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\mathrm{d}^{N-1}}{\mathrm{d}x^{N-1}}G(z+\varepsilon,z)-\frac{\mathrm{d}^{N-1}}{\mathrm{d}x^{N-1}}G(z-\varepsilon,z)\right] = 1 \tag{5.32}$$

Für $x \neq z$ ist $\delta(z-x) = 0$, dort muss $G(x, z)$ also die homogene DGL erfüllen und die Abhängigkeit von z kann nur in den Koeffizienten stecken.

$$G(x,z) \overset{(5.22)}{=} \sum_{i=1}^{N} c_i(z)\,e^{\lambda_i x}\,,\quad x \neq z \tag{5.33}$$

oder analog für (5.23).

Anmerkung: Dieses Vorgehen funktioniert genau gleich bei nicht-konstanten Koeffizienten $a_i(x)$ der DGL.