3 δ-Funktion

Die *δ-Funktion* ist eigentlich gar keine Funktion, sondern eine spezielle irreguläre Distribution mit kompaktem Träger, die in der Mathematik und Physik von grundlegender Bedeutung ist.

3.1 Auftreten und Definition

Die Dirac'sche-δ-Funktion hat viele Anwendungen in der Physik, z.B.

- Hilfsgröße beim Rechnen, vgl. Abschnitt 5.5
- Beschreibung von Stößen
- In Pseudo-Potentialen in der Quantenmechanik

Sie ist definiert über

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} f(x_0) & \text{falls } a < x_0 < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\delta(x-x_0) = 0, \text{ falls } x \neq x_0.$$

und sie ergibt erst in Zusammenhang mit einer Funktion $f(x)$ einen Sinn.

Die δ-Funktion ist trotz ihres Namens keine Funktion sondern eine Distribution. Distributionen sind stetige, lineare Funktionale auf dem Raum $\mathcal{D}$ der Testfunktion, das heißt sie sind Abbildungen:

$$T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}\,;\ \alpha f + \beta g \mapsto T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g) \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

Dabei enthält $\mathcal{D}$ die Funktion f, deren Träger kompakt ist und die beliebig oft differenzierbar sind $(f \in C^\infty)$.

Zusammenhang mit der δ-Funktion: $T_\delta(f) = \int f(x)\delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x = f(x_0)$, das heißt die Funktion f wird abgebildet auf ihren Wert bei $x = x_0$.

3.2 Approximation der δ-Funktion

Die δ-Funktion lässt sich nur über (3.1) angeben. Man kann keine explizite Funktion nennen. Es gibt aber Approximationen, zum Beispiel:

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n & \text{falls } -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3.3a}$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-nx^2} \tag{3.3b}$$

$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2x^2} \tag{3.3c}$$

$$\delta_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\pi x} \tag{3.3d}$$

Für alle Funktionen gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \delta_n(0) &\to \infty \\ \lim_{n\to\infty} \delta_n(x \neq 0) &\to 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Die Grenzwerte existieren also nicht für $x = 0$. Trotzdem kann man sie als Approximation der δ-Funktion verstehen in dem Sinn, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0-a}^{x_0-b} f(x)\delta_n(x-x_0)\,\mathrm{d}x = f(x_0) \tag{3.5}$$

BEWEIS für (3.3a):

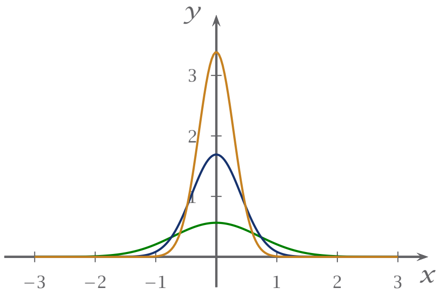
Sei $a > \frac{1}{2n}$:

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_{x_0-a}^{x_0+a} f(x)\delta_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &\overset{(3.3a)}{=} \int_{x_0-\frac{1}{2n}}^{x_0+\frac{1}{2n}} n\, f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} n\left(F\left(x_0+\frac{1}{2n}\right) - F\left(x_0-\frac{1}{2n}\right)\right) \\ &\overset{\varepsilon=\frac{1}{n}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\left(F\left(x_0+\frac{\varepsilon}{2}\right) - F\left(x_0-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)}{\varepsilon} = F'(x_0) = f(x_0) \end{aligned}$$

Oft schreibt man: $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n(x) = \delta(x)$.

Aber Vorsicht: Das setzt die Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwert in (3.5) vorraus! Der Grenzwert existiert aber nicht für $x = 0$! Diese Schreibweise darf nicht wörtlich genommen werden. Sie steht symbolisch für (3.5).

Visualisierung der Approximation $\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-nx^2}$ mit $n \in \{1, 3, 6\}$:



3.3 Eigenschaften der δ-Funktion

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x \overset{(3.1)}{=} 1 \tag{3.6}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\,\mathrm{d}x \overset{(3.1)}{=} f(0) \tag{3.7}$$

$$\delta(x)x = 0 \tag{3.8}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) x\,\mathrm{d}x \overset{(3.1)}{=} 0 f(0) = 0 \\ = &\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ 0\ f(0) \end{aligned}$$

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|} \delta(x - x_n), \tag{3.9}$$

wobei die x_n alle (einfachen) Nullstellen von $g(x)$ sind.

Insbesondere folgt aus (3.9):

$$\begin{aligned} \text{Für } g(x) &= -x \\ \delta(-x) &= \delta(x) \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} \text{Für } g(x) &= bx \\ \delta(bx) &= \frac{1}{|b|}\delta(x) \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.4 Beispiele für die Anwendung der δ-Funktion

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,(\delta(x-1)-\delta(x+1))\,\mathrm{d}x = f(1) - f(-1) \tag{3.12a}$$

$$\int\limits_{-1}^{2} x^2\delta(x-1)\,\mathrm{d}x = 1 \tag{3.12b}$$

$$\int\limits_{-1}^{2} x^2\delta(x+2)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{3.12c}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\delta(x-y^2)\,\mathrm{d}x = e^{-y^2} \tag{3.12d}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x = f(x_0) \tag{3.12e}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} 3x^2\delta(x+2)\,\mathrm{d}x = 12 \tag{3.12f}$$

5.5.2 Vorgehen an einem Beispiel

Aufgabe: Löse die DGL

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}y(x) + y(x) = \frac{1}{\sin(x)} \tag{5.34}$$

im Intervall $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ mit $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Schritt 1: Allgemeine Lösung für $x \neq z$

$$G(x,z) \overset{(5.28)}{\underset{(5.24b)}{=}} \begin{cases} A(z)\cos(x) + B(z)\sin(x) & x < z \\ C(z)\cos(x) + D(z)\sin(x) & x > z \end{cases} \tag{5.35a}$$

$$A(z), B(z), C(z), D(z) : z\text{-abhängige Koeffizienten}$$
$$\cos(x), \sin(x) : \text{Lösung der homogenen DGL}$$

Schritt 2: Die Randbedingungen fordern

$$G(\underbrace{0}_{x<z\to A(z)=0}, z) = G(\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{x>z\to D(z)=0}, z) = 0 \tag{5.35b}$$

und es bleibt:

$$G(x,z) \overset{(5.35a)}{\underset{(5.35b)}{=}} \begin{cases} B(z)\sin(x) & x < z \\ C(z)\cos(x) & x > z \end{cases} \tag{5.35c}$$

Schritt 3: Stetigkeit und Sprungbedingung (5.32) auswerten:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(G(z+\varepsilon,z) - G(z-\varepsilon,z)\right) = 0,$$

also mit (5.35c):

$$C(z)\cos(z) - B(z)\sin(z) = 0, \tag{5.36a}$$

und aus (5.32):

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\mathrm{d}G(z+\varepsilon,z)}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}G(z-\varepsilon,z)}{\mathrm{d}x}\right) = 1,$$

also mit (5.35c):

$$-C(z)\sin(z) - B(z)\cos(z) = 1 \tag{5.36b}$$

Die Gleichungen (5.36a) und (5.36b) liefern unter Verwendung der Identität $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$:

$$C(z) = -\sin(z) \tag{5.37a}$$

$$B(z) = -\cos(z) \tag{5.37b}$$

Schritt 4: Greensche Funktion aufstellen:

$$G(x,z) \overset{(5.35c)}{\underset{(5.37a),(5.37b)}{=}} \begin{cases} -\cos(z)\sin(x) & x < z \\ -\sin(z)\cos(x) & x > z \end{cases} \tag{5.38}$$

Schritt 5: Bestimmen der Lösung von (5.32)

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,z)\frac{1}{\sin(z)}\,\mathrm{d}z \\ &\overset{(5.38)}{=} -\int_0^x \cos(x)\frac{\sin(z)}{\sin(z)}\,\mathrm{d}z - \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\frac{\cos(z)}{\sin(z)}\,\mathrm{d}z \\ &= -x\cos(x) + \sin(x)\ln(\sin(x)) \end{aligned} \tag{5.39}$$

Anmerkungen:

- Die gleiche Greensche Funktion kann nun bei gleichen Randbedingungen auch für jede andere Inhomogenität verwendet werden.
- Die hier vorgestellte Methode funktioniert nur bei homogenen Randbedingungen $y^{(n)}(x_i) = 0$. Liegen diese nicht vor, transformiert man

  $$f(x) = y(x) + g(x)$$

  mit einem $g(x)$ so, dass $f(x)$ homogene Randbedingungen erfüllt. Man löst die DGL für $f(x)$.