7 Differential- und Integralrechung für Funktionen mehrer Veränderlicher

Die Differential- und Integralrechung für Funktionen *mehrer Veränderlicher* unterscheidet sich gegenüber der herkömmlichen Infinitesimalrechnung im Hinblick auf die Anzahl der Variablen und den damit verbundenen Besonderheiten und veränderten Regeln.

7.1 Differentialrechnung

7.1.1 Partielle Ableitung

a) Einführung

Die partielle Ableitung ist die Verallgemeinerung von (1.3) und hat für eine Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ die Form

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{x_i \to \infty} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \tag{7.1}$$

Sie entspricht der Ableitung (1.3), wenn wir alle anderen x_j festhalten (als konstant betrachten).

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = f(\underline{r}) &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\underline{r}| \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{|\underline{r}|} \end{aligned} \tag{7.2}$$

Es gibt mehrere Schreibweisen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{x_i} f = f_{x_i} \tag{7.3}$$

oder $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$, heißt: Ableitung von f nach x, wobei y festgehalten wird.

Auch höhere Ableitungen folgen dem Schema (7.1).

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \sqrt{x^2+y^2} \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \,,\; \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{2}\frac{x2x}{\sqrt{x^2+y^2}^3} = \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}^3}
\end{aligned}
$$

Die Reihenfolge der partiellen Ableitungen lässt sich immer vertauschen!

b) Kettenregel und totale Ableitung

Betrachte eine Funktion $f(x,y,t)$, wobei x und y selbst wieder von t anbhängen.

$$x = x(t) \;,\; y = y(t)$$

Dann:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t), y(t), t) \\
=&\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

(7.4) heißt *totale Ableitung*.

Beispiel:

$$f(x,y) = x\, e^{-y} \quad \text{mit } x = 1 + t,\ y = t^3$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t), y(t)) &\overset{(7.4)}{=} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{e^{-y}} \underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}_{1} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{-x\, e^{-y}} \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}_{3t^2} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{0} \\ &= e^{-y(t)} - 3t^2\, x(t)\, e^{-y(t)} \\ &= (-3t^3 - 3t^2 + 1)\, e^{-t^3}\end{aligned}$$

c) Zum Unterschied zwischen partieller und totaler Ableitung

Die Definition besagt:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon, y) - f(x,y)}{\varepsilon}$$

Alle Variablen außer x werden in diesem Fall festgehalten. Das gilt auch, wenn y selbst wieder von x abhängt:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(\underbrace{x}_{\text{Wirkt nur auf dieses } x}, \overbrace{y(x)}^{\text{muss festgehalten werden}})$$

Warum ist das so?

Das ist die *Definition* der partiellen Ableitung. Sie wirkt nur auf die expliziten Abhängigkeiten. Die totale Ableitung wirkt auf die expliziten *und* impliziten Beiträge:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x(t), t) \qquad \frac{\partial}{\partial t} f(x(t), t) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t), t)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \underbrace{\frac{\exp(t\, x(t))}{t}}_{f(x(t),t)}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial t} \exp(t\, x(t))\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x(t)\, \exp(t\, x(t))\right) \\ &= \dot{x}(t)\, \exp(t\, x(t)) + x(t)\, \exp(t\, x(t))(x(t) + t\, \dot{x}(t))\end{aligned}$$