7.1.2 Differentiale

a) Totales Differential

Wir betrachten eine Funktion $f(x, y)$ unter kleinen Änderungen Δx und Δy. Dann reicht eine lineare Näherung.

$$\begin{aligned}\Delta t &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \\ &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \\ &= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\Delta x + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\Delta y \\ &\overset{(7.1)}{\approx} \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\end{aligned}$$

Im Grenzübergang $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ schreibt man:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{7.5}$$

$\mathrm{d}f$ heißt *totales Differential*.

In mehreren Dimensionen allgemein:

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i \tag{7.6}$$

b) Vollständiges Differential

In Verallgemeinerung von (7.6) nennt man jede Form:

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_i \tag{7.7a}$$

ein Differential.

Es heißt *vollständig* oder *exakt*, wenn es eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ so gibt, dass

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{7.7b}$$

Notwendige Bedingung für ein vollständiges Differential ist:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \tag{7.7c}$$

Beispiele:

$y_1 = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$ ist ein vollständiges Differential, denn es existiert:

$$f(x, y) = xy + c$$

sodass

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

$y_2 = y\,\mathrm{d}x + 3x\,\mathrm{d}y$ ist kein vollständiges Differential.

c) Variablentransformation

Haben wir eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ und wollen die Variablen x_i durch neue u_j ausdrücken gilt:

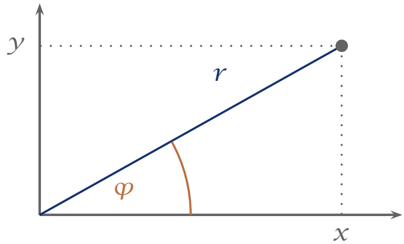
$$x_i = x_i(u_1, \ldots, u_n)$$

Was passiert mit der Ableitung?

$$\frac{\partial f}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right)\frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{7.8}$$

Beispiel: In 2 Dimensionen transformieren wir kartesische Koordinaten in ebene Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r\ \cos(\varphi) \\ y &= r\ \sin(\varphi) \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$



Dann ist z.B. $(f(x(r,\varphi)), y(r,\varphi))$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r} &\stackrel{(7.8)}{=} \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)\frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial f}{\partial y} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

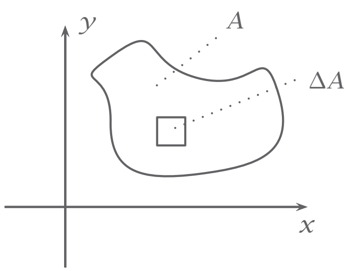
7.2 Integralrechnung

7.2.1 Definition des mehrdimensionalen Integrals

Wir haben das 1-dimensionale Integral als Grenzwertprozess eingeführt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \text{ , mit } \Delta x = \frac{b-a}{n} \tag{1.14}$$

Ganz analog können wir nun bei einer Funktion vorgehen, die von zwei Variablen abhängt: $f(x,y)$



Wir greifen kleine Flächenelemente ΔA heraus und summieren über diese:

$$I = \int \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x,y) = \lim_{n\to\infty} \sum_n f(x_n, y_n)\Delta A_n, \tag{7.9}$$

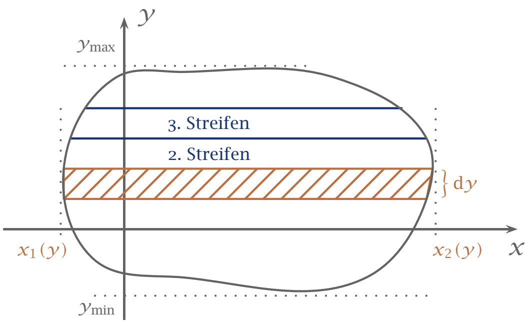
wobei der Punkt (x_n, y_n) in ΔA liegen soll.

Existiert der Grenzwert und ist er unabhängig von der Wahl eines (x_n, y_n) in ΔA, so existiert das Integral (7.9).

Analog können wir weitere Dimensionen hinzufügen, z.B. ein *Volumenintegral* ΔV_n.

7.2.2 Berechnung

Die praktische Berechnung erfolgt nicht über beliebige Flächenelemente ΔA_n, sondern über geschickt gewählte Reihenfolgen. In zwei Dimensionen kann das folgende Vorgehen gewählt werden:



- Summiere (bzw. Integriere) zuerst über einen Streifen parallel zur x-Achse, d.h. bei festem y. *Achtung:* die Grenzen hängen vom gewählten y ab. Dies ist ein eindimensionales Integral, das wir mit den bekannten Methoden berechnen können.
- Summiere dann über alle Streifen y, dies ist jetzt auch ein eindimensionales Integral.

In einer Gleichung können wir das folgendermaßen ausdrücken:

$$I = \underbrace{\int\limits_{y_{\min}}^{y_{\max}} \underbrace{\left[\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right]}_{\text{Streifen parallel zur } x\text{-Achse bei festem } y\text{, übrig bleibt eine Funktion, die nur noch von } y \text{ abhängt.}} \mathrm{d}y}_{\text{Integration über alle Streifen für das Integral, das nur noch von } y \text{ abhängt.}}$$

Die Reihenfolge ist nicht entscheidend, man kann auch erst Streifen parallel zur y-Achse wählen.

In mehreren Dimension funktioniert das völlig analog: Erst Streifen bilden, dann die Streifen zur Fläche aufsummieren, dann die Fläche zum Volumen aufsummieren, usw.

7.2.3 Beispiele

a) Dreieck

Wir berechnen die Fläche dieses Dreiecks: