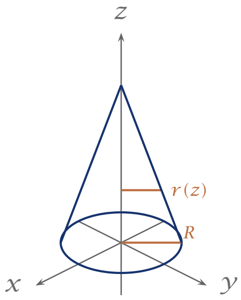
$$
\begin{aligned}
A &= \int_A 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{y(x)} \mathrm{d}y \; 1 \\
&= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{y(x)} 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 [y]_0^{y(x)} \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{1} y(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x) \,\mathrm{d}x = \left[x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Integriere xy^2 über diese Fläche: (Das ist völlig exemplarisch und hat keinerlei praktische Anwendung)

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \; xy^2 \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 \mathrm{d}x \; x \left[y^3\right]_0^{1-x} \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 \mathrm{d}x \; x(1-x)^3 \\
&= -\frac{1}{12} \underbrace{\left[x(1-x)^4\right]_0^1}_{=0} + \frac{1}{12} \int_0^1 (1-x)^4 \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{60} \left[(1-x)^5\right]_0^1 = \frac{1}{60}
\end{aligned}
$$

b) Kegel

Wir berechnen das Volumen des Kegels:



Das Volumen ist:

$$V = \iiint_V 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

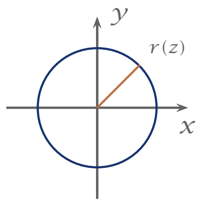
Wahl der Grenzen

$$z: \quad z_{\text{min}} = 0 \,, \quad z_{\text{max}} = h$$

x und y: Für jedes z ist die Fläche (x, y) ein Kreis mit dem Radius

$$r(z) = R\left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

In dieser Ebene:



$$y_{\text{min}} = -r(z) \,, \quad y_{\text{max}} = r(z)$$

Aus der Kreisgleichung: $x^2 + y^2 = r^2$

$$x_{\text{min}} = -\sqrt{r(z)^2 - y^2} \,, \quad x_{\text{max}} = \sqrt{r(z)^2 - y^2}$$

$$V = \int_0^h \mathrm{d}z \int_{-r(z)}^{r(z)} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{r(z)^2 - y^2}}^{\sqrt{r(z)^2 - y^2}} \mathrm{d}x \; 1 = \ldots$$

c) Kugel

$$V = \int_{-R}^{R} \mathrm{d}z \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{R^2-z^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-z^2-y^2}} \mathrm{d}x \; f(x,y,z) = \ldots$$

In Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \\ V &= \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \;\; \sin\theta r^2 f(r,\theta,\varphi) = \ldots \end{aligned}$$