

6.4. Variablen transformation

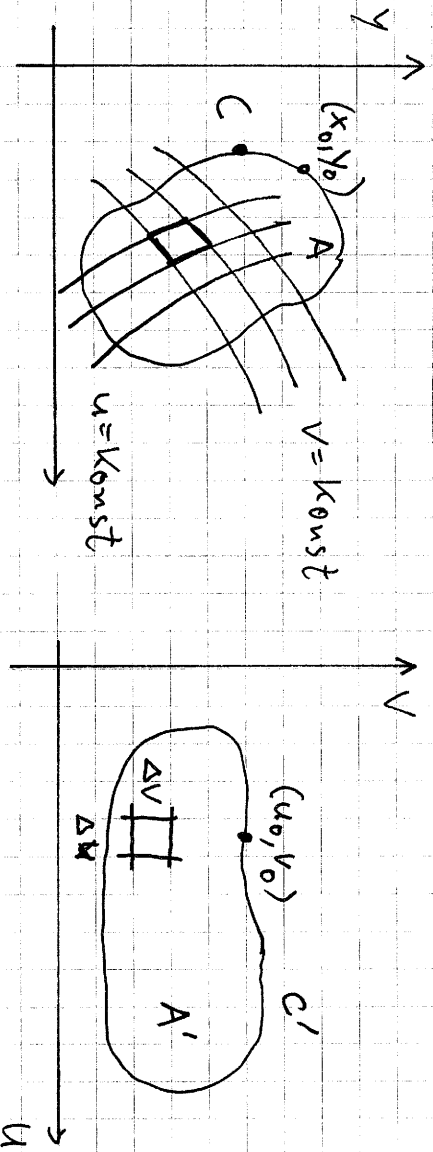
Wir betrachten das Integral auf dem Bereich A

$$I = \int_A dx dy f(x, y)$$

wobei die Variablen $x(u, v)$, $y(u, v)$ ebenfalls Funktionen von den Variablen u, v sind:

$$\Rightarrow \hat{f}(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

Im folgenden wollen wir untersuchen, wie das Integral in den neuen Variablen sieht.



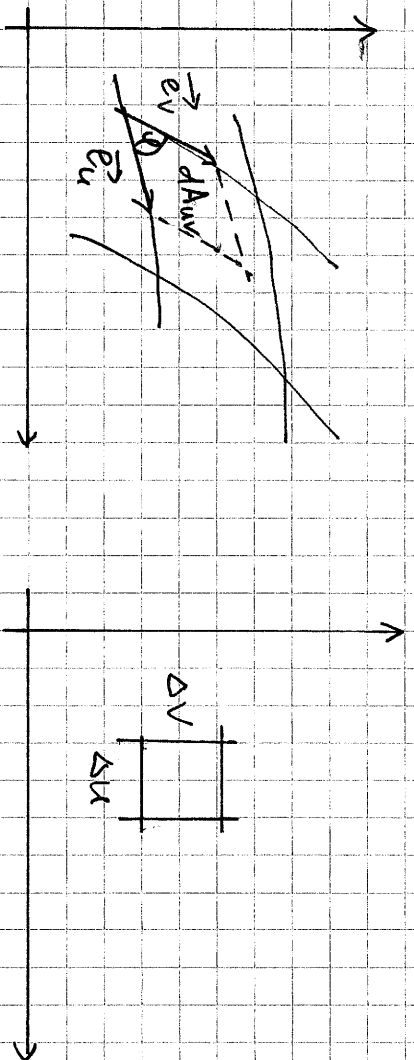
- Zuerst müssen wir den Integrationsbereich A in den neuen Integrationsbereich A' umformen

D.h. der Bereich A ist beschränkt mit der geschlossenen Kurve C . Der Integrationsbereich A' in den neuen Variablen ist beschränkt mit der Kurve C' :

$$\bullet (u_0, v_0) \in C' \Rightarrow x_0(u_0, v_0), y_0(u_0, v_0) \text{ mit } (x_0, y_0) \in C$$

$$\bullet (u, v) \in A' \Rightarrow (x(u, v), y(u, v)) \in A$$

Die Integration in den x - y Koordinaten ist das Integral von kleinen Volumenelementen:



Daher müssen wir die Fläche dA_{uv} für ein kleines Quadrat $\Delta u \cdot \Delta v$ berechnen: dA_{uv} Parallelogramm aufgespannt mit

$$\bullet \vec{e}_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix} : \text{Tangentenvektor an die Linie } v = \text{const.}$$

$$\bullet \vec{e}_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} : \text{Tangentenvektor an die Linie } u = \text{const.}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow dA_{uv} &= \Delta u \cdot \Delta v \cdot |\vec{e}_u| |\vec{e}_v| \sin \varphi \\ &= \underbrace{\left| \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right|}_{\text{dudv}} \Delta u \cdot \Delta v \\ &\equiv J : \text{Jacobi'sche Determinante} \end{aligned}$$

Somit folgt aus der Definition des Integrals

$$I = \int_A dx dy f(x, y) = \lim_{\Delta A_p \rightarrow 0} \sum_{p=1}^N f(x_p, y_p) \Delta A_p$$

$$= \lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} \sum_{p=1}^N f(x(u_p, v_p), y(u_p, v_p)) \left| \frac{\partial x}{\partial u}(u_p, v_p) \frac{\partial y}{\partial v}(u_p, v_p) - \frac{\partial x}{\partial v}(u_p, v_p) \frac{\partial y}{\partial u}(u_p, v_p) \right|$$

$$= \int_{A'} du dv f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \right| \cdot \Delta V \Delta u$$

$$= \int_{A'} du dv \hat{f}(u, v) J(u, v) \quad (6.11)$$

mit dem Jacobian:

$$J(u, v) = \left| \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) - \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \right| \quad (6.12)$$

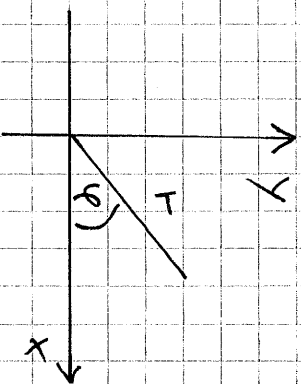
Bsp: $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \begin{matrix} x = \sin \varphi \\ y = \sin \vartheta \end{matrix}$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \cos \varphi \cos \vartheta \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 \varphi}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 \vartheta}} \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Polar Koordinaten:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$



$$\Rightarrow J(r, \varphi) = \left| \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right|$$

$$= |\cos \varphi \cos \varphi - \sin \varphi (-1) r \sin \varphi|$$

$$= r$$

$$\Rightarrow \int_A dx dy f(x, y) = \int_{A'} d\varphi dr r f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

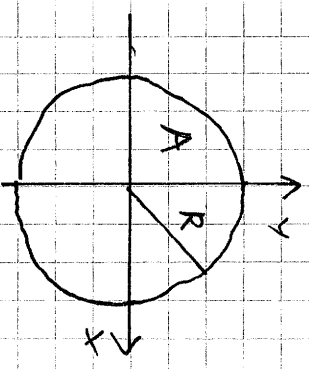
(6.13)

$$= \int_{A'} d\varphi dr r \tilde{f}(r, \varphi)$$

BSP: • $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$

• A: Kreis mit Radius R

$$\Rightarrow \tilde{f}(r, \varphi) = e^{-r^2}$$



$$I = \int_A dx dy e^{-(x^2+y^2)} = \int_{A'} d\varphi dr r e^{-r^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R dr r e^{-r^2} = 2\pi \int_0^R dr r e^{-r^2}$$

$$= 2\pi \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^R = \pi (1 - e^{-R^2})$$

Als Anwendung können wir jetzt das Integral

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2}$$

berechnen:

$$F^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} \right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-(x^2+y^2)}$$

← voriges Beispiel

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr r e^{-r^2} = \pi$$

$$\Rightarrow F = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

Die Verallgemeinerung der Variablentransformationsregel in höheren Dimensionen ergibt:

$$f(x_1 \dots x_n) \quad x_i(u_1 \dots u_n)$$

$$I = \int_A dx_1 \dots dx_n f(x_1 \dots x_n)$$

$$= \int_{A'} du_1 \dots du_n f(u_1 \dots u_n) J(u_1 \dots u_n)$$

Die Jacobian ist jetzt:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_n} & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{pmatrix} \quad \text{nxn Matrix}$$

wobei $J = |\det M|$: Determinante von M
(siehe lin. Algebra)

In 3 Dimensionen lautet es:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} J = & \frac{\partial x}{\partial u} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ & - \frac{\partial y}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ & + \frac{\partial z}{\partial u} \left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial w} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$