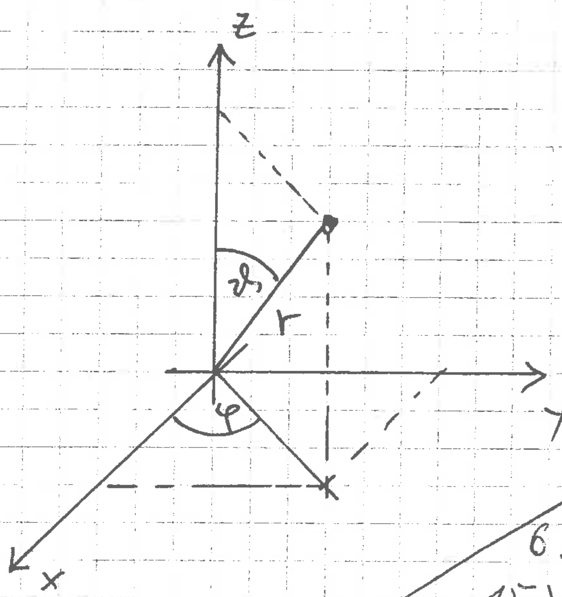
Kugelkoordinaten

$x = r\cos\varphi \sin\vartheta$

$y = r\sin\varphi \sin\vartheta$

$z = r\cos\vartheta$

$\Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$



6.12
15. VL

Die Flächen $r = \text{Konst}$ beschreiben Kugeln mit Zentrum $(0,0,0)$ und Radius r

- $r \in [0, \infty)$
- $\varphi \in [0, 2\pi)$
- $\vartheta \in [0, \pi)$

$$I = \int_A dx\, dy\, dz\ f(x,y,z)$$

$$= \int_{A'} d\varphi\, d\vartheta \sin\vartheta\, dr\, r^2\ \tilde{f}(r,\varphi,\vartheta)$$

<u>Bsp:</u> Volumen der Kugel: $A = \{(x,y,z) \text{ mit } x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$

$$\int_A dx\,dy\,dz\ 1 = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}\ \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta}_{2}\ \underbrace{\int_0^{R} dr\ r^2}_{\frac{1}{3}R^3}$$

$$= 2\pi \quad 2 \quad \frac{1}{3} R^3$$

$$= \frac{4\pi}{3} R^3$$

6.5 Gradient und Laplace operator

Als Gradienten der Funktion $f(x,y)$ bezeichnet man den Vektor

$$\nabla \equiv \left(\partial_x f(x,y)\,,\ \partial_y f(x,y)\right)$$

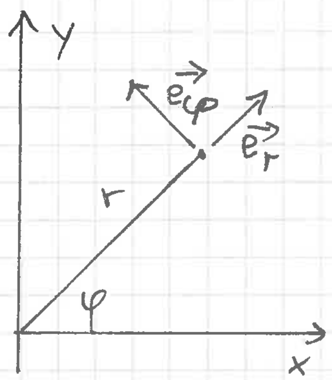
auch Nabla operator genannt.

Als Operator geschrieben:

$$\nabla \cdot f = \vec{e_x}\,\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \vec{e_y}\,\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

Umrechnung in Polarkoordinaten:

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$



Aus Abschnitt 6.2:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x = \cos\varphi\ \overset{\frac{\partial}{\partial r}}{\overset{\shortparallel}{\partial_r}} - \frac{\sin\varphi}{r}\ \overset{\frac{\partial}{\partial \varphi}}{\overset{\shortparallel}{\partial_\varphi}}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \partial_y = \underbrace{\sin\varphi}\ \partial_r + \underbrace{\frac{\cos\varphi}{r}}\ \partial_\varphi$$

$$\vec{e_r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \vec{e_r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \end{pmatrix} \Bigg/ \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \end{pmatrix} \right\| \qquad \frac{1}{r}\,\vec{e_\varphi} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \Bigg/ \overset{r}{\overset{\shortparallel}{\left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \right\|}} \qquad \vec{e_\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Damit ist Nabla in Polar Koordinaten

$$\nabla \hat{f}(r,\varphi) = \vec{e_r}\,\frac{\partial}{\partial r}\hat{f} + \vec{e_\varphi}\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{f}$$

Der Laplaceoperator ist definiert als

$$\Delta f = \partial_x^2 f + \partial_y^2 f \quad = (\nabla \cdot \nabla) f$$

In Kartesischen Koodinaten ist dies das Skalarprodukt $\nabla \cdot \nabla$

Umrechnung in Polar Koordinaten:

$(c\varphi = \cos\varphi, \quad s\varphi = \sin\varphi)$

Achtung! Es gilt die Produktregel!

$$(\overset{1}{c\varphi}\,\partial_r - \overset{2}{\frac{s\varphi}{r}}\partial_\varphi)(\overset{1}{c\varphi}\,\partial_r - \overset{2}{\frac{s\varphi}{r}}\partial_\varphi) + (\overset{3}{s\varphi}\,\partial_r + \overset{4}{\frac{c\varphi}{r}}\partial_\varphi)(\overset{3}{s\varphi}\,\partial_r + \overset{4}{\frac{c\varphi}{r}}\partial_\varphi)$$

$$= \overset{11}{c^2\varphi\,\partial_r^2} + \overset{12}{\cancel{\frac{c\varphi s\varphi}{r^2}\partial_\varphi}} - \overset{12}{\cancel{\frac{s\varphi c\varphi}{r}\partial_r\partial_\varphi}} + \overset{21}{\frac{s^2\varphi}{r}\partial_r}$$

$$- \overset{21}{\cancel{\frac{s\varphi c\varphi}{r}\partial_r\partial_\varphi}} + \overset{22}{\cancel{\frac{s\varphi c\varphi}{r^2}\partial_\varphi}} + \overset{22}{\frac{s^2\varphi}{r^2}\partial_\varphi^2}$$

$$+ \overset{33}{s^2\varphi\,\partial_r^2} - \overset{34}{\cancel{\frac{s\varphi c\varphi}{r^2}\partial_\varphi}} + \overset{34}{\cancel{\frac{s\varphi c\varphi}{r}\partial_r\partial_\varphi}} + \overset{43}{\frac{c^2\varphi}{r}\partial_r}$$

$$+ \overset{43}{\cancel{\frac{c\varphi s\varphi}{r}\partial_r\partial_\varphi}} - \overset{44}{\cancel{\frac{c\varphi s\varphi}{r^2}\partial_\varphi}} + \overset{44}{\frac{c^2\varphi}{r^2}\partial_\varphi^2}$$

$$= \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2$$

$$\Rightarrow \hat{\Delta} f = \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\right) f = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) f$$

Gemischte Terme fallen weg, da das Koordinaten-system orthogonal ist.

Bspw: 21: $-\frac{s\varphi}{r}\partial_\varphi\, c\varphi\,\partial_r f(r,\varphi) = -\frac{s\varphi}{r}\partial_r\left(\partial_\varphi\{c\varphi f(r,\varphi)\}\right)$

~~16. VL 12.12~~

$$= -\frac{s\varphi}{r}\partial_r\left(-s\varphi f(r,\varphi) + c\varphi\,\partial_\varphi f(r,\varphi)\right)$$

~~16. VL 3.12~~