7. Vektoranalysis

Wir sind interessiert an Funktion $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "f(x)"] \arrow[dr, "\vec{f}(x)"'] & \mathbb{R} \\
\mathbb{R}^3 \arrow[ur, "f(\vec{r})"] \arrow[r, "\vec{f}(\vec{r})"'] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

- $f(x)$: reelle Funktion
- $f(\vec{r})$: skalare Felder $\phi(\vec{r})$, $E(\vec{r})$
- $\vec{f}(x)$: Raumkurve $\vec{x}(t)$, $\vec{v}(t)$
- $\vec{f}(\vec{r})$: Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$, $\vec{E}(\vec{r})$

Ableiten eines Vektors: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} x_i(t)\, \vec{e}_i$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i(t)\, \vec{e}_i \tag{7.1}$$

- $\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} A_1(\vec{r}) \\ A_2(\vec{r}) \\ A_3(\vec{r}) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} A_i(\vec{r})\, \vec{e}_i$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x A_1(\vec{r}) \\ \partial_x A_2(\vec{r}) \\ \partial_x A_3(\vec{r}) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x} A_i(\vec{r})\, \vec{e}_i$$

Bem: Mittels Produktregel erhalten wir das Verhalten der verschiedenen Produkte:

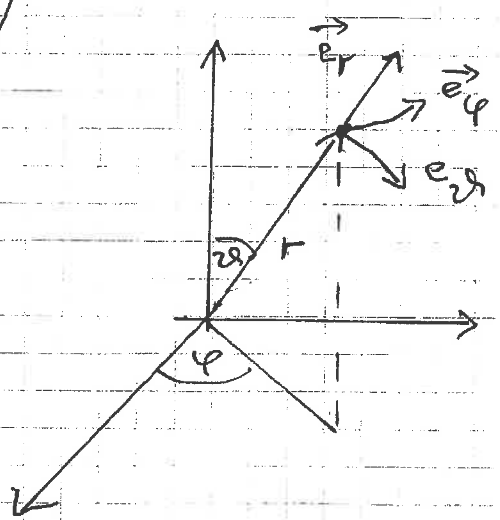
$$\bullet\ \frac{d}{du}(\phi\,\vec{a}) = \phi\,\frac{d\vec{a}}{du} + \left(\frac{d\phi}{du}\right)\vec{a}$$

$$\bullet\ \frac{d}{du}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\,\frac{d\vec{b}}{\partial u} + \left(\frac{d\vec{a}}{du}\right)\vec{b} \qquad (7.2)$$

$$\bullet\ \frac{d}{du}(\vec{a}\times\vec{b}) = \left(\frac{d\vec{a}}{du}\right)\times\vec{b} + \vec{a}\times\left(\frac{d\vec{b}}{du}\right)$$

Bsp: Kugelkoordinaten:

$$\vec{r}(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\sin\vartheta \\ r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \vec{e}_r = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ r\cos\varphi\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

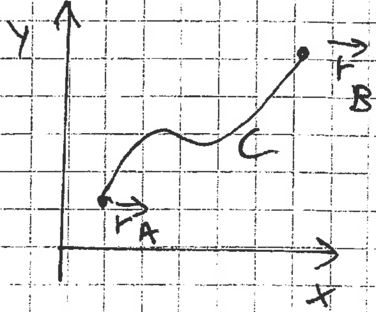
$$\vec{e}_\vartheta = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \bullet\ |\vec{e}_\varphi| = |\vec{e}_\vartheta| = r \qquad \bullet\ |\vec{e}_r| = 1$$

$$\bullet\ \vec{e}_r\cdot\vec{e}_\varphi = \vec{e}_r\cdot\vec{e}_\vartheta = \vec{e}_\varphi\cdot\vec{e}_\vartheta = 0$$

7.1. Linien- und Oberflächenintegrale

Ein Linienintegral ist gegeben durch Ausdrücke von der Form



$$I = \int_C d\vec{r} \cdot \vec{A}(x, y, z)$$

wobei C eine Kurve im Raum darstellt. Die Kurve ist parametrisiert durch einen Parameter t

$$[t_0, t_1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto \vec{r}(t) \quad \text{mit } \vec{r}_0(t_0) = \vec{r}_A \quad \vec{r}(t_1) = \vec{r}_B$$

Die Berechnung des Linienintegrals erfolgt dann mittels

$$d\vec{r} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) \cdot dt$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{d}{dt}\vec{r}(t)\right] \cdot \vec{A}(\vec{r}(t))$$

__Bsp:__ • Die Arbeit entlang eines Weges $\vec{r}(t)$ im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$

$$W = \int_C d\vec{r}\, \vec{F}(\vec{r})$$

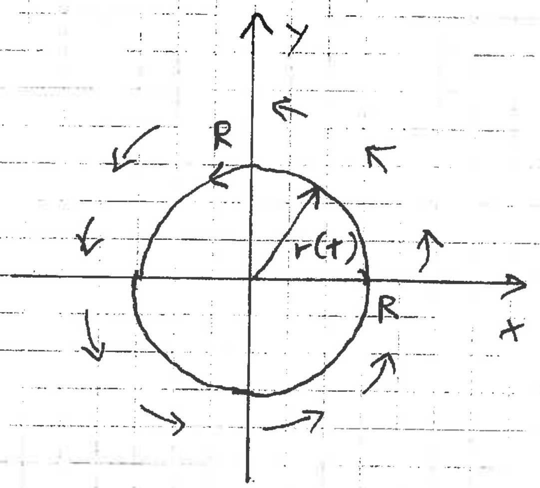
<u>Bem.</u> Das Integral ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve C:

$$t = f(s) \implies \vec{r}\,(f(s)) \equiv \hat{\vec{r}}\,(s)$$

$$\implies I = \int d\vec{r}\;\vec{A}\,(\vec{r}\,) = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right] \cdot \vec{A}\,(\vec{r}\,(t))$$

$$\overset{\substack{dt = f'ds \\ t = f(s)}}{=} \int_{s_0}^{s_1} ds\; \underbrace{f' \cdot \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\right]}_{\frac{d\vec{r}}{ds}}\; \vec{A}\,(\vec{r}\,(s))$$

<u>Bsp:</u> $\vec{F} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$



- $\vec{r}\,(\varphi) = R \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

- $\frac{d}{d\varphi}\vec{r} = R \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

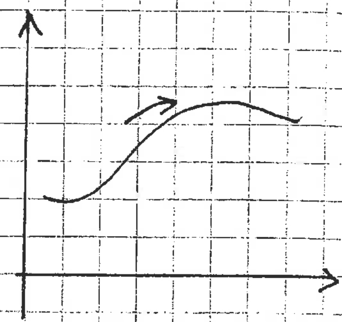
$$\implies I = \int_0^{2\pi} d\varphi\; R \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \frac{R}{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,R^2}}^{\vec{F}\,(r\,(\varphi))}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

Wirbelfeld

Bem: Weitere Linienintegrale:

- $\int_C d\vec{r}\, f(\vec{r}) = \int_{t_0}^{t_1} dt\, f(\vec{r}(t)) \frac{d\vec{r}}{dt}$: Vektorgröße

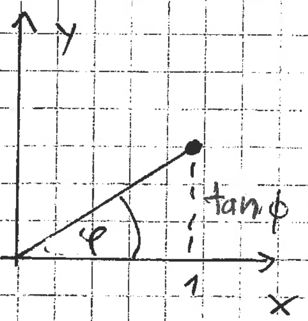


- Bogenlänge:

$$\int_C ds = \int_{t_0}^{t_1} dt \left| \frac{dr(t)}{dt} \right|$$

$\Rightarrow$ • $\int_C ds\; \phi(\vec{r})$: Skalargröße

- $\int_C ds\; \vec{F}(\vec{r})$: Vektorgröße



Bsp: • Länge einer Geraden

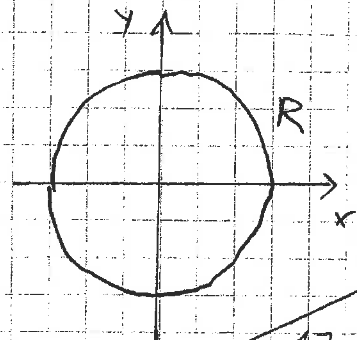
$$r(t) = \begin{pmatrix} t \\ \tan\phi\, t \end{pmatrix} \quad 0 \le t \le 1$$

$$\int_C ds = \int_0^1 dt \sqrt{1+\tan^2\phi} = \sqrt{1+\tan^2\phi}$$

- Umfang eines Kreises: $r(\varphi) = R \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

$$L = \int_C ds = \int_0^{2\pi} d\varphi\; R \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}$$

$$= R \cdot 2\pi$$



17. VL
13.12