# Flächenintegrale

Eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ können wir darstellen mit Hilfe von 2 Parametern

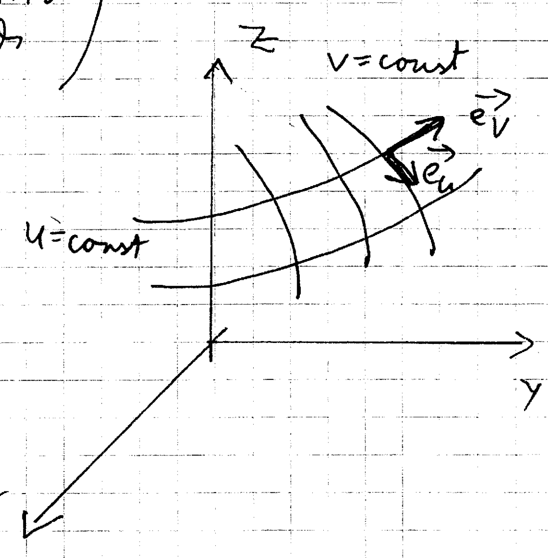
$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

<u>Bsp:</u> • Eine Ebene aufgespannt durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch den Punkt $\vec{r}_0$ hat die Form

$$\vec{r}(u,v) = \vec{r}_0 + u\,\vec{a} + v\,\vec{b}$$

• Eine Kugel mit Radius R

$$\vec{r}(\varphi,\vartheta) = R\begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$




Die Vektoren

$$\vec{e}_u = \frac{\partial}{\partial u}\vec{r}(u,v)$$

$$\vec{e}_v = \frac{\partial}{\partial v}\vec{r}(u,v)$$

beschreiben die Tangenten an die Linien auf der Fläche mit v = const und u = const.

Das Flächendifferential $dA$ in einem Punkt hat somit die Form:

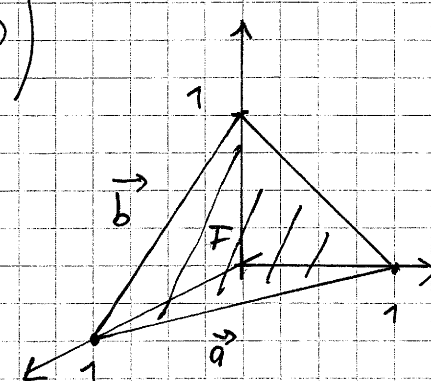
$$dA = \left|\vec{e}_u(u,v) \times \vec{e}_v(u,v)\right| \underbrace{\overset{du}{=}}_{du\,dv} \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)\right| du\,dv$$

Somit ist der Flächeninhalt einer Fläche im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F_B = \iint_B du\,dv \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)\right|$$

<u>Bsp:</u> Darstellung der Fläche

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$




$$\Rightarrow \vec{e}_u = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{e}_v = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right| = \left|\begin{pmatrix}1\\+1\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3}$$

$$F_B = \int_0^1 dv \int_0^{1-v\,*} du\ \sqrt{3} = \int_0^1 dv\ \sqrt{3}\,(1-v) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dreieck $(u,v) = ((0,0),(1,0),(0,1))$

Hintere Grenze $u+v=1 \Rightarrow u = 1-v\ ^*$

Bei einem Oberflächenintegral wird nun jeder Punkt auf der Oberfläche mit einer Funktion gewichtet:

$$\int_S ds\ \phi(\vec{r}) = \int_B du\,dv\ \phi(\vec{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|$$

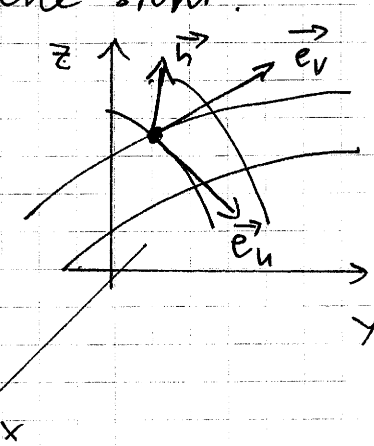
skalares Integral

Es ist jedoch auch möglich, vektorielle Oberflächenintegrale zu definieren. Insbesondere ist das Oberflächenelement

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\, du\,dv = \vec{n}\, dA$$

eine Vektorgröße, wobei der Einheitsvektor $\vec{n}$ senkrecht auf der Oberfläche steht.

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|}$$




Die Richtung von $\vec{n}$ hängt von der Orientierung der Oberfläche ab. Bei geschlossenen Flächen, wie z.B. die Kugel wird die Orientierung normalerweise so gewählt, dass $\vec{n}$ nach außen zeigt.