

Bsp: Kugel $\vec{r}(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$ -7.9-

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \varphi \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\vartheta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin^2 \vartheta \\ \sin \varphi \sin^2 \vartheta \\ \cos \vartheta \sin \vartheta \end{pmatrix} = \sin \vartheta \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$|\vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\varphi| = |\sin \vartheta|$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} = \vec{r}(\vartheta, \varphi)$$

Wir finden jetzt die weiteren Oberflächenintegrale:

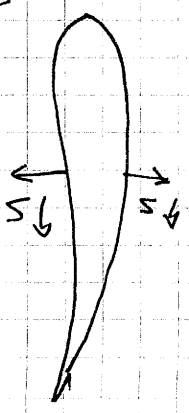
$$\int_S d\vec{S} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_B du dv \vec{F}(u, v) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) : \text{skalare Größe}$$

$$\int_S d\vec{S} \phi(\vec{r}) = \int_B du dv \phi(u, v) \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) : \text{Vektorgröße}$$

$$\int_S d\vec{S} \times \vec{F}(\vec{r}) = \int_B du dv \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) \times \vec{F}(\vec{r}) : \text{Vektorgröße}$$

Bsp.: Der Tragflügel eines

Flugzeugs erzeugt durch seine Form und den Luftstrom



verschiedene Drücke auf der Oberseite und

Unterseite. Bezeichnen wir mit $P(\vec{r})$ das

erzeugte Druckfeld, so ist der Auftrieb des Flugzeugs gegeben durch:

$$\vec{F} = \int_S dS \, P(\vec{r}) \quad ; \text{ wobei } S \text{ die Oberfläche der Tragfläche ist.}$$

~ Eine Flüssigkeit fließt mit einem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r})$. D.h. in jedem Punkt $\vec{r}$ ordnen wir die lokale Geschwindigkeit der Flüssigkeit zu.

Zudem hat sie eine Massendichte $\rho(\vec{r})$

• Die lokale Masse, die pro Zeiteinheit durch eine Oberfläche fließt ist gegeben durch:

$$\dot{M} = \int_S dS \, \vec{v}(\vec{r}) \cdot \rho(\vec{r})$$

7.2. Ableitungsoperator

Gradient: Ein Skalarfeld $\phi(\vec{r})$ ordnet jedem

Punkt $\vec{r}$ im Raum eine reelle Zahl zu. Der Gradient des Skalarfeldes ist dann definiert als

$$\nabla \phi(\vec{r}) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Somit ist $\nabla \phi(\vec{r})$ ein Vektorfeld. In seinen Komponenten hat es die Form (in der natürlichen Basis):

$$\nabla \phi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Das Verhalten des Skalarfeldes um einen Punkt $\vec{r}_0$ lässt sich mit dem Gradienten sehr einfach beschreiben:

$$\vec{r}(s) = \vec{r}_0 + s \vec{a}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi(\vec{r}(s))}{ds} = \vec{a} \cdot \nabla \phi(\vec{r}_0)$$

Richtungsableitung

Der Gradient zeigt somit in die Richtung der stärksten Zunahme des Skalarfeldes.

Die Gleichung $\phi(\vec{r}) = \text{const}$ bestimmt eine Fläche im $\mathbb{R}^3$, wobei der Gradient immer senkrecht auf dieser Fläche steht.

Der Name Ableitungsoperator kommt von der Eigenschaft, dass jedem Skalarfeld ein Vektorfeld zugeordnet ist. Daher schreibt man auch oft

$$\nabla = \partial_x \vec{e}_x + \partial_y \vec{e}_y + \partial_z \vec{e}_z$$

wobei für ein Skalarfeld gilt:

$$\begin{aligned} \nabla \phi(\vec{r}) &= (\partial_x \vec{e}_x + \partial_y \vec{e}_y + \partial_z \vec{e}_z) \phi(\vec{r}) \\ &= \partial_x \phi \vec{e}_x + \partial_y \phi \vec{e}_y + \partial_z \phi \vec{e}_z \end{aligned}$$

Bsp: $\phi(x, y, z) = xyz \quad \nabla \phi = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ yx \end{pmatrix}$

• $\phi(x, y, z) = M_m G \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$: Gravitationspotential

$$\Rightarrow \vec{F}_g = -\nabla \phi = M_m G \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \text{Gravitationsfeld}$$

Divergenz: Betrachte ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$, das jedem Punkt $\vec{r}$ einen Vektor zuordnet.

Die Divergenz von $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ ist definiert

$$\text{als } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Die Divergenz eines Vektorfeldes beschreibt physikalisch Quellterme (Source-Terms):

• Die Divergenz des $\vec{E}$ -Feldes verschwindet, wenn keine Ladungen vorhanden sind:

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

• Für das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r})$ und die Massendichte $\rho(\vec{r})$ einer fließenden Flüssigkeit oder Gas gilt:

$$\text{div} [\rho(\vec{r}) \cdot \vec{v}(\vec{r})] = 0$$

wenn keine Quelle / Abfluss vorhanden ist.

Bsp: $\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \text{div } \vec{A} = 3$

$$\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \text{div } \vec{A} = 0$$

Laplace-Operator:

Die Kombination von Gradient und Divergenz ergibt den Laplaceoperator für ein Skalarfeld $\phi(\vec{r})$

$$\Delta \phi(\vec{r}) = \operatorname{div} \nabla \phi(\vec{r}) = \partial_x^2 \phi + \partial_y^2 \phi + \partial_z^2 \phi$$

Bsp: Gravitationspotential: $\phi(\vec{r}) = GmM \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\Rightarrow \Delta \phi(\vec{r}) = 0 \quad \text{für } \vec{r} \neq 0$$

Da aber bei $\vec{r} = 0$ eine Quelle / Masse sitzt, die ein Gravitationsfeld erzeugt, sollte also $\operatorname{div} \nabla \phi(r)$ bei $\vec{r} = 0$ nicht verschwinden.

In der Tat gilt:

$$\Delta \phi(r) = 4\pi G \underbrace{\delta(x) \delta(y) \delta(z)}_{\delta(\vec{r})}$$

mit der bekannten δ -Funktion

19. VL

20.12