1.2.1 Motivation und eine mögliche Definition

In Anlehnung an Unterabschnitt 1.1.1: Wieder betrachten wir die Trajektorie eines Teilchens über einen gewissen Zeitraum. Wir kennen dieses Mal die Geschwindigkeit $v(t)$. Welchen Weg hat das Teilchen aber zurückgelegt?

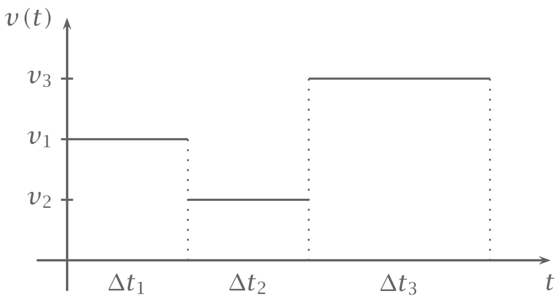
Bei der Druchschnittsgeschwindigkeit ist das einfach:

$$\Delta s \overset{(1.2a)}{=} \overline{v}\Delta t$$

Was müssen wir betrachten, wenn sich die Geschwindigkeit in Stücken ändert?

Wir erhalten nur eine stückweise konstante Geschwindigkeit:

$$\Delta s = v_1\Delta t_1 + v_2\Delta t_2 + v_3\Delta t_3 = \sum_i v_i\Delta t_i$$



Ändert sich v ständig, muss Δt gegen Null gehen. $\Delta t \to \mathrm{d}t$

Das führt uns auf das *infinitesimale Wegelement* $\mathrm{d}s = v(t)\,\mathrm{d}t$.

Dies wiederum führt auf die Integration:

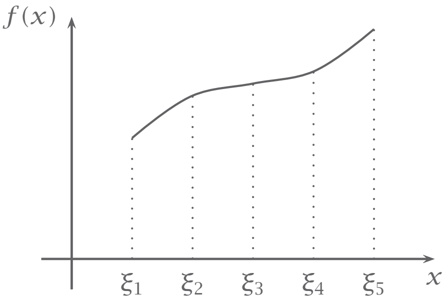
$$\Delta s = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.11}$$

Das Integral

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x) \tag{1.12}$$

ist über einen Grenzwertprozess definiert.

Betrachte dazu:



Das Intervall $a \leq x \leq b$ wird in n kleine Intervalle $a < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n < b$ mit Funktionswerten $f(x_i)$ aufgeteilt, wobei $\xi_{i-1} < x_i < \xi_i$.

Mit diesen Intervallen kann eine Summe geformt werden:

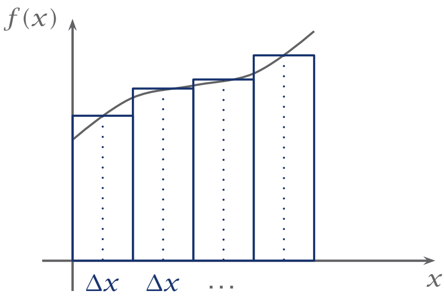
$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(\xi_i - \xi_{i-1}) \tag{1.13}$$

Lässt man die Teilintervalle gegen Null gehen (und $n \to \infty$), erhält man das *Riemann'sche Integral*:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x\,, \quad \text{mit } \Delta x = \frac{b-a}{n} \tag{1.14}$$

Eine Funktion $f(x)$ heißt *integrierbar*, wenn dieser Grenzwert existiert und eindeutig ist (unabhängig von der Wahl der x_i und ξ_i).

Bekannte Interpretation aus der Schule: Fläche unter der Kurve:



Eigenschaften des bestimmten Integrals

$$\int_a^b 0 \,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.15a}$$

$$\int_a^a f(x) \,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.15b}$$

$$\int_b^a f(x) \,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \tag{1.15c}$$

$$\int_a^c f(x) \,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x) \,\mathrm{d}x \tag{1.15d}$$

$$\int_a^b (af(x) + bg(x)) \,\mathrm{d}x = a\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x + b\int_a^b g(x) \,\mathrm{d}x \tag{1.15e}$$

1.2.2 Die Stammfunktion

a) Definition

Betrachte die Funktion $F(x) = \int_a^x f(u) \,\mathrm{d}u$ und deren Ableitung.

Betrachte dazu zuerst:

$$F(x+\Delta x) = \int\limits_{a}^{x+\Delta x} f(u)\,\mathrm{d}u \overset{(1.15\text{d})}{=} \int\limits_{a}^{x} f(u)\,\mathrm{d}u + \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= F(x) + \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(u)\,\mathrm{d}u \tag{1.16a}$$

Daraus folgt dann:

$$F(x+\Delta x) - F(x) \overset{(1.16\text{a})}{=} \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(u)\,\mathrm{d}u \tag{1.16b}$$

und die Ableitung lautet:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\\ &\overset{(1.16\text{b})}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_{x}^{x+\Delta x} f(u)\,\mathrm{d}u}{\Delta x}\\ &\overset{(1.14)}{=} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\Delta x}{\Delta x} = f(x)\end{aligned} \tag{1.17}$$

Mit diesem Ergebnis definiert man die *Stammfunktion* oder das *unbestimmte Integral*:

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.18}$$

$F(x)$ ist immer dann Stammfunktion von $f(x)$, wenn gilt $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$. Die Funktion $f(x)$ hat unendlich viele Stammfunktionen, denn wenn $F(x)$ Stammfunktion ist, dann auch $G(x) = F(x) + c$.

b) Beziehung zum bestimmten Integral

Notation:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b$$

c) Wichtige Stammfunktionen

$$\int a \, dx = ax + c \tag{1.20a}$$

$$\int ax^n \, dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c \tag{1.20b}$$

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c \tag{1.20c}$$

$$\int \frac{a}{x} \, dx = a \ln(x) + c \tag{1.20d}$$

$$\int a \cos(bx) \, dx = \frac{a}{b} \sin(bx) + c \tag{1.20e}$$

$$\int a \sin(bx) \, dx = -\frac{a}{b} \cos(bx) + c \tag{1.20f}$$

1.2.3 Integrationsregeln

Integrale können schnell kompliziert werden. Die beiden folgenden Regeln können helfen, das Integral zu vereinfachen um es so besser zu berechnen.

a) Substitution

Beispiel 1:

$I = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ wird substituiert durch die Regel $y = \arcsin(x)$, $x = \sin(y)$.

Wir wissen, dass $\frac{dx}{dy} = \cos(y)$, also $dx = \cos(y) \, dy$

$$I = \int \frac{\cos(y) \, dy}{\sqrt{1 - \sin^2(y)}} = \int dy = y + c = \arcsin(x) + c \tag{1.21}$$

Beispiel 2:

Wichtig ist die Grenzen auch zu substituieren.

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{x_0}^{x_1} x \exp(ax^2)\,\mathrm{d}x \\
&\quad \Big| \; x^2 = u \Rightarrow x = \sqrt{u}, \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \rightsquigarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x} = \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} \\
&= \int_{x_0^2}^{x_1^2} \sqrt{u} \exp(au) \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} \\
&= \frac{1}{2} \int_{x_0^2}^{x_1^2} \exp(au)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2a} \exp(au) \Big|_{x_0^2}^{x_1^2} \\
&= \frac{1}{2a} \exp(ax^2) \Big|_{x_0}^{x_1}
\end{aligned}
$$

Formale Regel der Integration durch *Substitution*:

$$
\int_a^b \mathrm{d}y\; f(y) \underset{y=g(x)}{=} \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} \mathrm{d}x\; g'(x) f(g(x)) \tag{1.22}
$$

b) Partielle Integration

Formale Regel der *partiellen Integration*:

$$
\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.23}
$$

Herleitung:

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \int (f(x)g(x))' \,\mathrm{d}x \\
&= \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) \,\mathrm{d}x \\
&= \int f'(x)g(x) \,\mathrm{d}x + \int f(x)g'(x) \,\mathrm{d}x \qquad \Big| - \int f(x)g'(x) \,\mathrm{d}x \\
\int f'(x)g(x) \,\mathrm{d}x &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned}
\int \ln x \,\mathrm{d}x = \int \underbrace{1}_{f'(x)} \underbrace{\ln x}_{g(x)} &= \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{\ln x}_{g(x)} - \int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} \,\mathrm{d}x \\
&= x \ln x - x + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{\sin x}_{g'(x)} \,\mathrm{d}x &= \underbrace{x}_{f(x)} \underbrace{(-\cos x)}_{g(x)} + \int \underbrace{1}_{f'(x)} \underbrace{\cos x}_{g(x)} \,\mathrm{d}x \\
&= -x \cos x + \sin x + c
\end{aligned}$$

2 Potenzreihenentwicklung

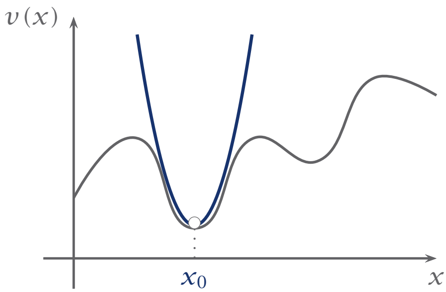
Als *Potenzreihe* bezeichnet man eine unendliche konvergente Reihe der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

2.1 Bedeutung in der Physik

Potenzreihen sind ein wichtiges Näherungsverfahren in der Physik. Sie kommen immer zur Anwendung, wenn eine Funktion $f(x)$ nur in einer kleinen Umgebung um einen Punkt x_0 ausgewertet werden muss.

Beispiel: Eine Masse schwingt um das Minimum eines komplizierten Potentials. Wie lautet die Schwingungsfrequenz? Zur Beantwortung dieser Frage reicht es aus, die Funktion $v(x)$ in der Nähe des Minimums zu kennen. Annäherung durch z.B. eine Parabel:



Was wird durch Potenzreihen einfacher?

Sei die Funktion $f(x)$ beliebig kompliziert.

Potenzreihe:

$$f_P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots + a_j(x - x_0)^j + \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{2.1}$$

Oft reicht es für eine lokale Umgebung von x_0 ($x - x_0$ ist klein), niedrige Potenzen zu betrachten:

$$f_{P,2}(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 \qquad \text{(quadratische Näherung)}$$

$f_{P,2}(x)$ ist meist wesentlich einfacher und macht das Integrieren, Lösen von Differentialgleichungen, etc. einfacher oder überhaupt erst möglich.

2.2 Taylorreihe

Wie sieht eine Potenzreihe $f_P(x)$ einer Funktion $f(x)$ um $x = x_0$ aus?

$$f_P(x) \overset{(2.1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Setze $x = x_0$. Aus der Forderung $f(x_0) = f_P(x_0)$ und aus $f_P(x_0) = a_0 + 0$ folgt:

$$a_0 = f(x_0) \tag{2.2a}$$

Es muss auch gelten $f'(x_0) = f_P'(x_0)$:

$$f_P'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n\, (x - x_0)^{n-1}$$
$$f_P'(x_0) = a_1 \overset{!}{=} f'(x_0) \tag{2.2b}$$

Weiterhin:

$$f_P''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, n(n-1)\, (x - x_0)^{n-2}$$
$$f_P''(x_0) = 2\, a_2 \overset{!}{=} f''(x_0)$$
$$\text{oder } a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0) \tag{2.2c}$$

Fortsetzen des Verfahrens führt auf die *Formel von Taylor*:

$$\boxed{f_P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n} \tag{2.3}$$

Anmerkungen:

- Hier wurde vorrausgesetzt, dass die Potenzreihe existiert und $f(x)$ beliebig of differenzierbar ist.
- Eine Potenzreihe muss nicht immer konvergieren. Meist ist die Konvergenz nur innerhalb eines *Konvergenzradius* gegeben, d.h. für $|x - x_0| < r$.
- Eine Taylorreihe mit $x_0 = 0$ heißt *McLaurin-Reihe*.

2.3 Beispiele

$\boxed{f(x) = \frac{1}{1-x}}$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4} \\
\text{oder } f^{(n)}(x) &= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \quad f^{(n)}(x_0) = n!
\end{aligned}$$

Taylorreihe:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} n!(x - \overbrace{x_0}^{=0})^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{2.4}$$

Konvergiert für $|x| < 1 \longrightarrow$ geometrische Reihe!

$\boxed{f(x) = e^x}$

$$f(x) = e^x, \quad x_0 = 0$$
$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(x_0) = 1$$

Taylorreihe:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{2.5}$$

Konvergiert für $x \in \mathbb{R}$

Weitere Beispiele:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.7}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x < 1 \tag{2.8}$$

6 Vektoren

Unter einem *Vektor* versteht man in der analytischen Geometrie ein Objekt, das eine Parallelverschiebung im Raum beschreibt.

6.1 Notwendigkeit und Darstellung

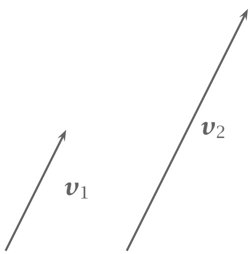
Wir kennen physikalische Größen, die nur einen Wert haben, zum Beispiel:

- Masse, Energie, Druck, … ⟶ Skalare

Daneben gibt es solche, die zusätzlich von ihrer Richtung abhängen, zum Beispiel:

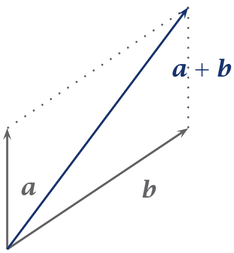
- Kraft, Geschwindigkeit, …

Zur Darstellung verwenden wir einen Pfeil im Raum, dessen Länge den Betrag der physikalischen Größe beschreibt. Die Länge eines Vektors wird *Betrag* genannt.



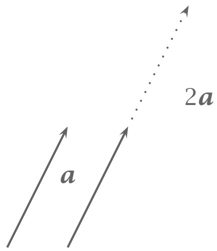
In diesem Bild kann man zwei Rechenoperationen einführen:

- Addition



$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$$
$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$$

- Skalare Multiplikation: $\lambda \boldsymbol{a}$



Für Vektoren gibt es mehrere Schreibweisen.

Pfeil:	$\boldsymbol{a}$, $\vec{a}$
Unterstrich:	$\underline{a}$
Fett:	$\boldsymbol{a}$

6.2 Basis und Koordinatensystem

6.2.1 Basisvektoren

Im dreidimensionalen können wir jeden Vektor als *Linearkombination* von drei *Basisvektoren* darstellen: