Rotation: Die Rotation ist definiert für ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ mittels

$$\operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = \nabla \times A(\vec{r}) \qquad (\text{curl})$$

$$= \vec{e}_x(\partial_y A_z - \partial_z A_y) + \vec{e}_y(\partial_z A_x - \partial_x A_z) + \vec{e}_z(\partial_x A_y - \partial_y A_x)$$

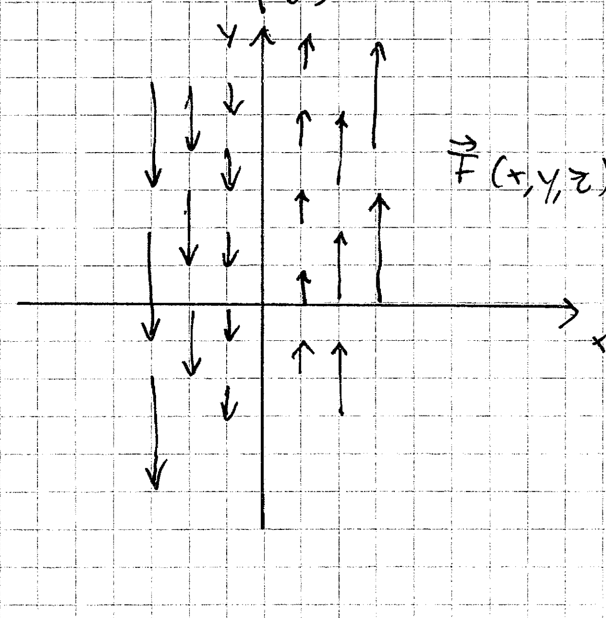
$$= \begin{pmatrix} \partial_y A_z - \partial_z A_y \\ \partial_z A_x - \partial_x A_z \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x \end{pmatrix}$$

und ist somit wieder ein Vektorfeld.

Die physikalische Interpretation ist, dass die Rotation Wirbel / Drehungen beschreibt:

- Betrachte das Kraftfeld $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$

Ein Objekt, das wir in ein solches Feld platzieren beginnt sich um seine eigene Achse zu drehen.



$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Drehachse des Objekts

Bem: · Für ein Skalarfeld $\phi(\vec{r})$ gilt:

$$\mathrm{rot}\ \nabla\ \phi(\vec{r}) = 0$$

$$\Bigg[\ \mathrm{rot}\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\phi = \begin{pmatrix}-\partial_z\partial_y\phi + \partial_y\partial_z\phi\\ \partial_z\partial_x\phi - \partial_x\partial_z\phi\\ \partial_x\partial_y\phi - \partial_y\partial_x\phi\end{pmatrix} = 0\ \Bigg]$$

· Für ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$ gilt:

$$\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\ \vec{A}(\vec{r}) = 0$$

Zudem sind folgende Relationen einfach zu beweisen:

$$\nabla\cdot(\phi\vec{A}) = (\nabla\phi)\cdot\vec{A} + (\nabla\cdot\vec{A})\phi$$

$$\nabla\times(\phi\vec{A}) = (\nabla\phi)\times\vec{A} + \phi(\nabla\times\vec{A})$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$