

7.3. Gaußscher Integralsatz

Die Integralsätze stellen einen Zusammenhang her zwischen dem Ableitungsoperator und dem Oberflächenintegralen.

Der Gaußsche Integralsatz besagt

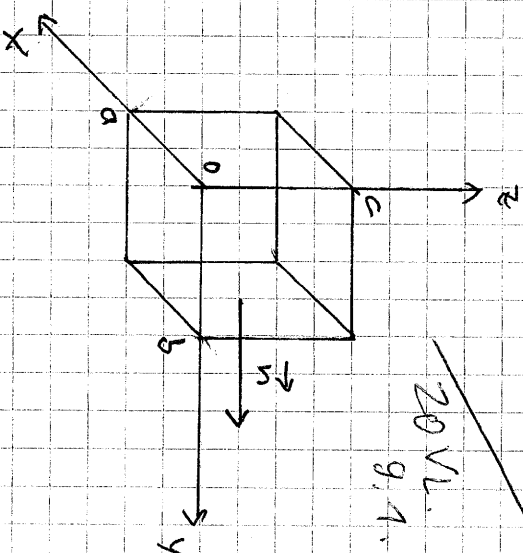
$$\int_V dV \operatorname{div} \vec{A} = \int d\vec{S} \cdot \vec{A} = \int dS \vec{n} \cdot \vec{A}$$

$$S = \partial V \quad S = \partial V$$

Wobei ∂V die Oberfläche des Volumens V beschreibt mit $\vec{n}$ senkrecht auf der Oberfläche stehend und nach außen zeigend.

Für V ein Quader gilt:

$$\begin{aligned} & \int_V dV \operatorname{div} \vec{A} \\ &= \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz \left[\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z \right] \\ &= \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz A_x(a, y, z) - \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz A_x(0, y, z) \\ &+ \int_0^a dx \int_0^c dz \int_0^b dy A_y(x, b, z) - \int_0^a dx \int_0^c dz \int_0^b dy A_y(x, 0, z) : \text{Oberflächen-} \\ &+ \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz A_z(x, y, c) - \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz A_z(x, y, 0) \quad \text{Integrale über} \\ &= \int_{\partial V} dS \vec{n} \cdot \vec{A} \quad \text{die 6 Seiten} \end{aligned}$$



20 VL.
9.1.

Für allgemeine Volumina folgt der Satz durch Zerlegen des Volumens in kleine Quader und mittels eines Grenzwerts

]

Bem: Falls das unverschore Gebiet Löcher aufweist, so müssen diese Löcher bei der Bestimmung des Randes berücksichtigt werden.

Bsp: Betrachte das Vektorfeld

$$\vec{A} = \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{A} = 3$$

mit dem Volumen V die Kugel mit Radius R

$$\Rightarrow \int_V d\vec{r} \operatorname{div} \vec{A} = 3 \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 = 4\pi R^3$$

$$\int_S d\vec{s} \stackrel{\vec{r}}{\parallel} \vec{A} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \cdot R^3 = 4\pi R^3$$

• Kontinuitätsgleichung: Die Änderung der Teilchenzahl einer Flüssigkeit im Volumen V hat die Form

$$\partial_t N_V(t) = \partial_t \int_V d\vec{r} \, g(\vec{r}, t) = \int_V d\vec{r} \, \partial_t g(\vec{r}, t) \quad g(\vec{r}, t): \text{Teilchendichte}$$

Teilchenfluss aus dem Volumen:

$$\int_{\partial V=S} d\vec{s} \cdot \underbrace{g(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)}_{\vec{j}(\vec{r}, t): \text{Teilchenstrom}}$$

$$\Rightarrow \partial_t N_V(t) = \int_V d\vec{r} \, \partial_t g(\vec{r}, t) = - \int_{\partial V=S} d\vec{s} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)$$

$$= - \int_V d\vec{r} \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t): \text{ gilt für alle Volumen } V$$

$$\Rightarrow \partial_t g(\vec{r}, t) + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\frac{d}{dt} g(\vec{r}, t) = - g(\vec{r}, t) \nabla \vec{v}(\vec{r}, t) \quad \downarrow \quad \operatorname{div} \vec{j} = \vec{v} \cdot \nabla g + g \nabla \vec{v}$$

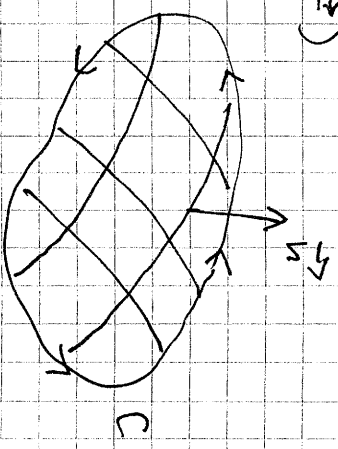
$$\frac{d}{dt} g = \frac{\partial}{\partial t} g + \vec{v} \cdot \nabla g$$

7.4. Integral Satz von Stokes

Der Satz von Stokes verbindet Oberflächenintegrale mit Linienintegralen entlang der Begrenzungslinie der Oberfläche. Für ein Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

gilt:

$$\int_S d\vec{S} (\text{rot } \vec{A}(\vec{r})) = \int_{C=\partial S} d\vec{r} \vec{A}(\vec{r})$$



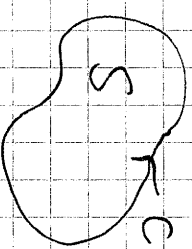
Dabei bilden der Normalenvektor $\vec{n}$ auf der

Oberfläche mit dem Umlaufvektor der Linie C eine rechtshändige Schraube

Bem: Die Fläche soll orientierbar sein, der Satz ist nicht anwendbar auf ein Möbiustrand.

- Für ein Vektorfeld mit $\text{rot } \vec{A} = 0$ gilt somit, dass alle geschlossenen Linienintegrale verschwinden:

$$\int_0 d\vec{r} \vec{A}(\vec{r}) = 0$$



$\Rightarrow$ Man kann jedoch nun zeigen, dass somit ein Skalarfeld $\phi(\vec{r})$ existiert mit

$$\vec{A}(\vec{r}) = \nabla \phi(\vec{r})$$

7.5. Anwendung: ^{Gravitations} ~~Gravitations~~ Potential

Eine homogen gefüllte Kugel mit Masse M erzeugt ein Gravitationspotential

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\alpha}{|\vec{r}|} \quad : \quad \alpha = MmG$$

Mittels des Gradienten erzeugt : $M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$ Radius der Kugel
dies das Gravitationsfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla \phi(\vec{r}) = \alpha \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Weiter gilt, dass $\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = 0$ für $\vec{r} \neq 0$

Es bleibt somit die Frage, was bei $\vec{r} = 0$ passiert, und andererseits macht das Resultat keinen Sinn für $|\vec{r}| < R$, da sich innerhalb der Kugel das Potential verändert.

Der Satz von Gauß braucht aber:

$$\begin{aligned} \int_S d\vec{S} \cdot \vec{F}(\vec{r}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \alpha \underbrace{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}}_{\vec{h}} \cdot \underbrace{\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}}_{\frac{1}{|\vec{r}|^2}} \cdot |\vec{r}|^2 \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \alpha = 4\pi \alpha : \text{unabhängig von } L \end{aligned}$$

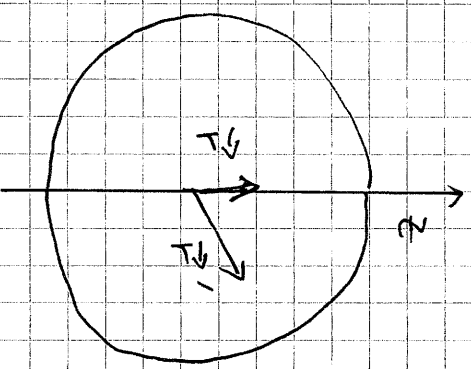
S : sei Kugel mit Radius $L > R$ $|\vec{r}| = L$

Satz von Gauss

$$\begin{aligned} &= \int_V d\vec{r} \operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) : \text{Also muss die } \operatorname{div} \vec{F} \text{ innerhalb des} \\ &\quad \text{transzienten Körpers gerade so sein,} \\ &\quad \text{dass es die Konstante } 4\pi\alpha \text{ ergibt.} \end{aligned}$$

Der Körper hat eine homogene Massendichte und daher lässt sich das Potential schreiben:

$$\phi(\vec{r}) = \int_V d\vec{r}' \frac{\frac{3\alpha}{4\pi R^3}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



Für $|\vec{r}| > R$ ergibt dies $\phi(\vec{r}) = \frac{\alpha}{|\vec{r}|}$, aber innerhalb des Körpers wird das Potential zu

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha}{2} \frac{|\vec{r}|^2}{R^3} & |\vec{r}| < R \\ \frac{\alpha}{|\vec{r}|} & |\vec{r}| > R \end{cases}$$

und das Gravitationsfeld wird zu

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla \phi(\vec{r}) = \begin{cases} \alpha \frac{\vec{r}}{R^3} & |\vec{r}| < R \\ \alpha \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} & |\vec{r}| > R \end{cases}$$

und die Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{3\alpha}{R^3} & |\vec{r}| < R \\ 0 & |\vec{r}| > R \end{cases}$$

Der Satz von Gauss ist somit erfüllt für den Fall der homogenen Kugel

Um jetzt den Fall einer reinen Punktladung zu untersuchen, lassen wir den Radius der Kugel gegen Null gehen, behalten die Masse aber konstant:

Im limit $R \rightarrow 0$ konvergiert $\text{div } \vec{F}(\vec{r})$ aber gegen eine 3-dimensionale δ -Funktion:

$$\text{div } \vec{F}(\vec{r}) \xrightarrow{R \rightarrow 0} 4\pi \delta(\vec{r})$$

$\int d\vec{r} \text{div } \vec{F}(\vec{r}) = 4\pi$ unabhängig von R , und für $R \rightarrow 0$ ist alles Gewicht in einer kleinen Kugel um den Ursprung

┘

Somit gilt für das Potential einer punktförmigen

Masse

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\alpha}{|\vec{r}|} \quad \vec{F}(\vec{r}) = \alpha \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

$$\Delta \phi(\vec{r}) = -4\pi \alpha \delta(\vec{r})$$

Bem: In der Elektrotechnik hat das Potential eines geladenen Punktteilchens (Elektron/Proton) ebenfalls das Potential $\phi(\vec{r}) \sim \frac{1}{|\vec{r}|}$

Daher der Name Coulombpotential.

21.VL

10.1,