

8 Kurvenlinige Koordinaten

Die drei gängigsten Koordinatensysteme sind:

x, y, z : Kartesische Koordinaten

r, φ, z : Zylinderkoordinaten

r, φ, ϑ : Kugelkoordinaten

Eine gemeinsame Eigenschaft dieser Systeme ist, dass sie orthogonal sind und dass der Laplaceoperator separiert (siehe später)

Die Koordinatentransformation hat im allgemeinen die Form

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(u_1, u_2, u_3) \\ x_2 &= x_2(u_1, u_2, u_3) \\ x_3 &= x_3(u_1, u_2, u_3) \end{aligned} \quad \vec{r}(u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Die Tangentialvektoren an die Koordinatenlinien sind definiert als

$$\vec{T}_i \equiv \vec{e}_{u_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \quad \text{mit } h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right|$$

Wir sind interessiert an orthogonalen Koordinaten-Systemen mit

$$\vec{e}_{u_i} \cdot \vec{e}_{u_j} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Damit bilden in jedem Punkt $\vec{r}$ die Vektoren $\vec{e}_{u_i}$ eine orthogonale Basis. Die Vektoren $\vec{e}_{u_i}$ hängen somit explizit vom Raumpunkt $\vec{r}$ ab.

Bem: Wir können auch schreiben

$$\vec{e}_{u_1} = \vec{e}_{u_2} \times \vec{e}_{u_3}$$

Ein Skalarfeld $\phi(\vec{r})$ können wir einfach in den neuen Koordinaten ausdrücken:

$$\phi(u_1, u_2, u_3) = \phi(\vec{r}(u_1, u_2, u_3))$$

Für ein Vektorfeld müssen wir aber zusätzlich die neue Basis $\vec{e}_{u_i}$ berücksichtigen

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_{u_i} \cdot A_{u_i}(u_1, u_2, u_3)$$

A_{u_i} erhalten wir mittels dem Skalarprodukt

$$A_{u_i} = \vec{A} \cdot \vec{e}_{u_i}$$

Bem: In den Krummlinigen Koordinaten sind die A_{ui} und $\vec{e}_i$ von u_1, u_2, u_3 abhängig!

$$\Rightarrow \partial_{u_i} \vec{A} = \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial A_{uj}}{\partial u_i} \vec{e}_j + A_{uj} \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial u_i} \right]$$

Bsp: Geschwindigkeitsvektor $\vec{V}$ im Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} \vec{V}(t) &= \frac{d}{dt} \vec{r}(t) = \frac{d}{dt} (r \vec{e}_r + z \vec{e}_z) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r + \dot{z} \vec{e}_z + z \dot{\vec{e}}_z \\ &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z \end{aligned}$$

Im folgenden wollen wir untersuchen, wie sich die Ableitungsoperatoren transformieren.

Gradient: Die Komponente von $\nabla \phi$ in $\vec{e}_i$ ist

$$\begin{aligned} (\nabla \phi)_{u_i} &= \nabla \phi \cdot \vec{e}_{u_i} = \nabla \phi \cdot \frac{1}{h_{u_i}} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \\ &= \frac{1}{h_{u_i}} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \\ &= \frac{1}{h_{u_i}} \partial_{u_i} \phi(r, u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{h_{u_i}} \frac{\partial \phi}{\partial u_i} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla \phi = \sum_i \vec{e}_{u_i} \frac{1}{h_{u_i}} \frac{\partial \phi}{\partial u_i}$$

Divergenz: Für die Divergenz in krummlinigen Koordinaten gilt:

$$\operatorname{div} \vec{A}(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_{u_1} h_{u_3} A_{u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_{u_1} h_{u_2} A_{u_3}) \right]$$

Betrachte zuerst den Anteil $\vec{e}_{u_1} A_{u_1}$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\vec{e}_{u_1} A_{u_1}) &= \nabla \cdot ((\vec{e}_{u_2} \times \vec{e}_{u_3}) A_{u_1}) : \vec{e}_{u_1} = h_{u_1} \nabla u_i \\ &= \nabla \cdot (h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1} (\nabla u_2 \times \nabla u_3)) \quad \text{in Formel für Grad mit } \phi = u_i \\ &\quad \left[\nabla u_i = \frac{1}{h_{u_i}} \vec{e}_{u_i} \right] \\ &\stackrel{\text{Produktregel}}{=} \nabla (h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1}) \cdot (\nabla u_2 \times \nabla u_3) + h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1} \cdot \underbrace{\nabla (\nabla u_2 \times \nabla u_3)}_{\stackrel{=0}{\text{mit Identität}}} \\ &= \frac{1}{h_{u_2} h_{u_3}} \vec{e}_{u_1} \cdot \nabla (h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1}) \quad \left[\nabla (\nabla u_2 \times \nabla u_3) \right] \\ &\stackrel{\text{mit Identität}}{=} \frac{1}{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}} \frac{\partial}{\partial u_1} (h_{u_2} h_{u_3} A_{u_1}) \quad \left[\begin{aligned} &= \nabla u_3 (\nabla \times \nabla u_2) \\ &\quad - \nabla u_2 (\nabla \times \nabla u_3) = 0 \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

und analog für die anderen Komponenten]

Laplace operator: Als wichtige Anwendung erhalten wir den Laplaceoperator in krummlinigen Koordinaten

$$\Delta \phi(u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{h_{u_1} h_{u_2} h_{u_3}} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_{u_2} h_{u_3}}{h_{u_1}} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_{u_1} h_{u_3}}{h_{u_2}} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_{u_1} h_{u_2}}{h_{u_3}} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \right) \right]$$

Rotation: Zur Vollständigkeit noch die Rotation:

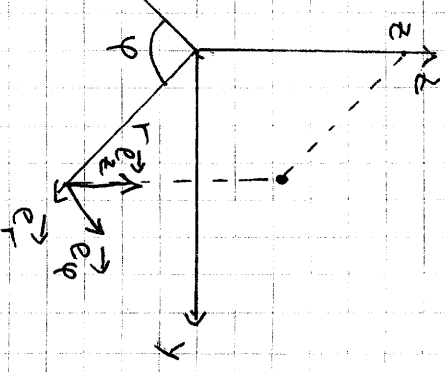
$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A}(u_1, u_2, u_3) &= \frac{1}{h_{u_2} h_{u_3}} \vec{e}_{u_1} \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (h_{u_3} A_{u_3}) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_{u_2} A_{u_2}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{h_{u_1} h_{u_3}} \vec{e}_{u_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_3} (h_{u_1} A_{u_1}) - \frac{\partial}{\partial u_1} (h_{u_3} A_{u_3}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{h_{u_1} h_{u_2}} \vec{e}_{u_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_{u_2} A_{u_2}) - \frac{\partial}{\partial u_2} (h_{u_1} A_{u_1}) \right] \end{aligned}$$

8.1. Zylinderkoordinaten

Wir haben die Transformation:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$



$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad h_r = 1$$

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad h_\varphi = r$$

$$\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad h_z = 1$$

$$\nabla \phi = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \phi + \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \phi + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \phi$$

$$\Delta \phi = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \phi$$

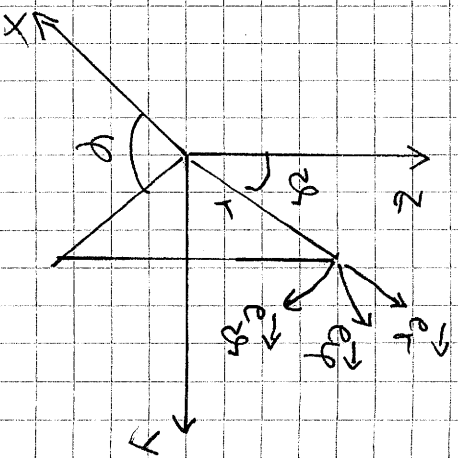
$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \phi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi$$

$$\int dr^3 = \int d\varphi \int dr \int dz$$

8.2. Kugelkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$



$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad h_r = 1$$

$$\vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix} \quad h_\vartheta = r$$

$$\vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad h_\varphi = r \sin \vartheta$$

$$\nabla \phi = \left[\vec{e}_r \partial_r \phi + \frac{1}{r} \vec{e}_\vartheta \partial_\vartheta \phi + \frac{1}{r \sin \vartheta} \vec{e}_\varphi \partial_\varphi \phi \right]$$

$$\Delta \phi = \left[\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \partial_\vartheta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 \right] \phi$$

$$\int d\vec{r} = \int dr \, r^2 \int d\vartheta \sin \vartheta \int d\varphi$$

8.3. Ergänzung: Divergenz und Rotation in Zylinder- und Kugelkoordinaten

Zylinderkoordinaten:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z$$

Kugelkoordinaten:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right) \vec{e}_\varphi$$

Dynamik in Zylinder- und Kugelkoordinaten

Zylinderkoordinaten: $\vec{r} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z$

Kugelkoordinaten: $\vec{r} = \ddot{r} \vec{e}_r + r\ddot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + r \sin \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} = & (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} - r \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\vartheta \\ & + (2\dot{r} \sin \vartheta \dot{\varphi} + 2r\dot{\vartheta} \cos \vartheta \dot{\varphi} + r \sin \vartheta \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$