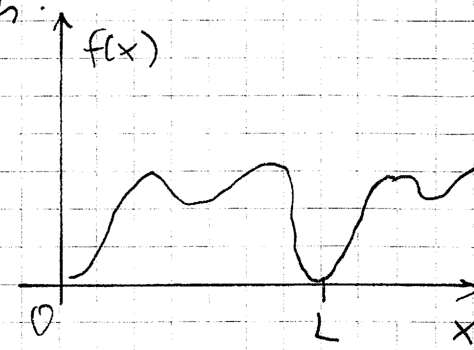
9. Fourierreihe und Fouriertransformation

9.1. Fourierreihe

Im folgenden sind wir an periodischen Funktionen $f(x)$ interessiert mit Periode L, d.h.:



$$f(x+L) = f(x)$$

Insbesondere dürfen die Funktionen auch komplexartig sein, und sollten die Dirichletbedingung erfüllen:

- $|f(x)|$ ist integrierbar
- $f(x)$ ist stückweise stetig
- $f(x)$ hat endlich viele Maxima und Minima

$$\left(f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} \left[f(x+\varepsilon) + f(x-\varepsilon) \right] \right)$$

Ein spezielles Set von solchen Funktionen sind

$$f_n(x) = e^{i k_n x} \qquad k_n = \frac{2\pi n}{L} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Insbesondere gilt

$$\frac{1}{L} \int_0^L dx \, f_n(x) \, f_m^*(x) = \frac{1}{L} \int_0^L dx \, e^{i \frac{2\pi}{L} (n-m) x} = \delta_{nm}$$

Die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x)$ sind definiert als

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-ik_n x}\, f(x) \equiv c_n$$

Die Fourierreihe hat dann die Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n(n)\, e^{ik_n x}$$

und es gilt, dass diese Reihe konvergiert und die Funktion identisch zu $f(x)$ ist, d.h. wir können $f(x)$ darstellen als

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, e^{ik_n x} \qquad k_n = \frac{2\pi n}{L}$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, e^{-ik_n x}\, f(x)$$

Somit können wir jede Funktion zerlegen in elementare Schwingungen

<u>Bem</u>: $e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$ und somit haben wir die Funktion in sin und cos zerlegt.

<u>Bem:</u> Alternative Form der Fourierreihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, e^{ik_n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \cos k_n x + i\hat{f}(n) \sin k_n x$$

$$= \underbrace{\hat{f}(0)}_{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)\right)}_{a_n} \cos k_n x + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(i\hat{f}(n) - i\hat{f}(-n)\right)}_{b_n} \sin k_n x$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k_n x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin k_n x$$

mit $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx \cos k_n x\, f(x)$ $\qquad k_n = \frac{2\pi n}{L}$

$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin k_n x\, f(x)$

<u>Bem:</u> Falls $f(x)$ reell ist, so gilt:

$$\hat{f}(n) = \hat{f}^{*}(-n) \qquad (a_n, b_n \in \mathbb{R})$$

- Falls $f(x)$ symmetrisch ist, d.h. $f(x) = +f(-x)$ so gilt:

$$\hat{f}(n) = \hat{f}(-n) \qquad (b_n = 0)$$

- Falls $f(x)$ symmetrisch und reell ist

$\hat{f}(n)$ symmetrisch und reell $(a_n \in \mathbb{R},\ b_n = 0)$

Die Beweisidee für den obigen Satz hat die Form

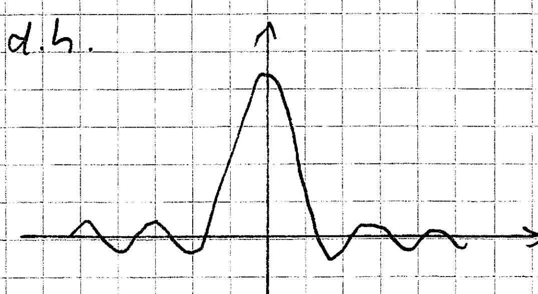
$$F_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{ik_n x} = \frac{1}{L} \int_0^L dy \underbrace{\sum_{n=-N}^{N} e^{ik_n(x-y)}}_{} f(y)$$

$$D_N(x-y) \equiv \frac{1}{L} \frac{\sin \frac{2\pi(N+\frac{1}{2})(x-y)}{L}}{\sin \frac{\pi(x-y)}{L}} = e^{-iN\frac{2\pi}{L}(x-y)} \frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{L}(x-y)}\right)^{2N+1}}{1-e^{i\frac{2\pi}{L}(x-y)}}$$

$$= \int_0^L dy\, D_N(x-y)\, f(x)$$

Die Funktion $D_N(x)$ gleicht den Funktionenreihen die gegen eine δ-Funktion konvergieren, d.h.

$$\int_0^L dy\, D(x-y) = 1$$



Formal gilt daher

$$D_N(x-y) \xrightarrow[N\to\infty]{} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x-y+jL)$$

Daher gilt:

$$F_N(x) \xrightarrow{N\to\infty} \int_0^L dy \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x-y+jL)\, f(y) = f(x)$$

<u>Bem:</u> Die Relation

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_n x} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(x+jL)$$

wird in der Physik oft verwendet.