

Bem: Für die Fourierkoeffizienten gilt die Gleichung

$$\frac{1}{L} \int_0^L dx |f(x)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \quad (\text{Satz von Parseval})$$

$$\begin{aligned} \int_0^L dx f(x) \cdot f(x)^* &= \frac{1}{L} \int_0^L dx \hat{f}(x)^* \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{ik_n x} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \left[\frac{1}{L} \int_0^L dx e^{-ik_n x} f(x) \right]^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \end{aligned}$$

Für zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ folgt sofort:

$$\frac{1}{L} \int_0^L dx f(x) g^*(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) g^*(n)$$

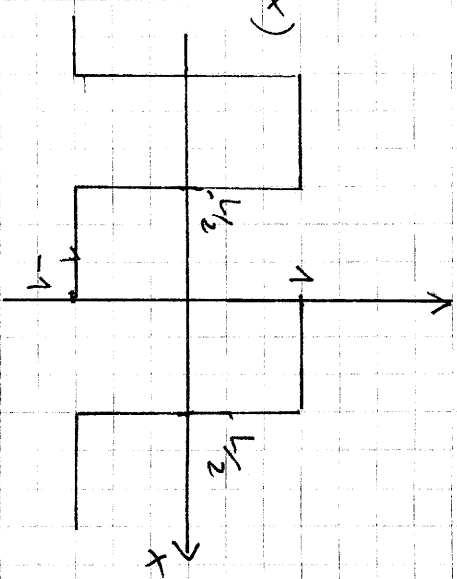
Für die Ableitung gilt $\widehat{\partial_x f(x)}(n) = ik_n \hat{f}(n)$, d.h.

$$\partial_x f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i k_n e^{ik_n x} \hat{f}(n)$$

Bsp: $\cdot f(x) = \cos \frac{2\pi}{L} x = \frac{1}{2} [e^{ik_1 x} + e^{-ik_1 x}]$

$$\Rightarrow \hat{f}(n) = \frac{1}{2} [\delta_{1,n} + \delta_{-1,n}]$$

$$\cdot f(x) = \begin{cases} -1 & -\frac{L}{2} \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \end{cases} = \Theta(x)$$



$$\Rightarrow \hat{f}(n) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx f(x) e^{-ik_n x}$$

$$= \frac{1}{L} \left[\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx e^{-ik_n x} - \int_{-\frac{L}{2}}^0 dx e^{-ik_n x} \right]$$

$$= \frac{1}{L} \left[\frac{1}{-ik_n} e^{-ik_n x} \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} - \frac{1}{-ik_n} e^{-ik_n x} \Big|_{-\frac{L}{2}}^0 \right]$$

$$= \frac{1}{L} \frac{1}{-ik_n} \left[e^{-i\frac{2\pi}{L} n \cdot \frac{L}{2}} - 1 - 1 + e^{+i\frac{2\pi}{L} n \frac{L}{2}} \right]$$

$$= \frac{1}{-i\pi n} [-\cos n\pi + 1] = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{2}{\pi n i} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

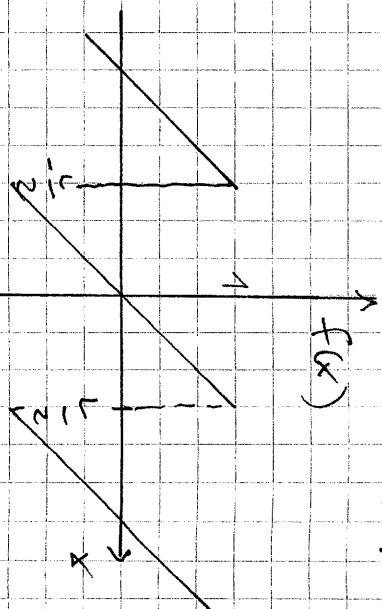
$$\Rightarrow \hat{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(2n+1)} \frac{2}{\pi i} \left[e^{i2\pi (2n+1)x \frac{L}{2}} - e^{-i2\pi (2n+1)x \frac{L}{2}} \right]$$

$$= \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2n'+1} \frac{4}{\pi} \sin 2\pi (2n'+1) \frac{x}{L}$$

Mit dem Satz von Parseval folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

• $f(x) = \frac{2x}{L} \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$



$-f(n) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \frac{2x}{L} e^{-ik_n x}$

$= \frac{2}{L^2} \left[x \frac{1}{-ik_n} e^{-ik_n x} \Big|_{-L/2}^{L/2} - \int_{-L/2}^{L/2} dx \frac{1}{-ik_n} e^{-ik_n x} \right]$

$u \cdot v = u'v'$

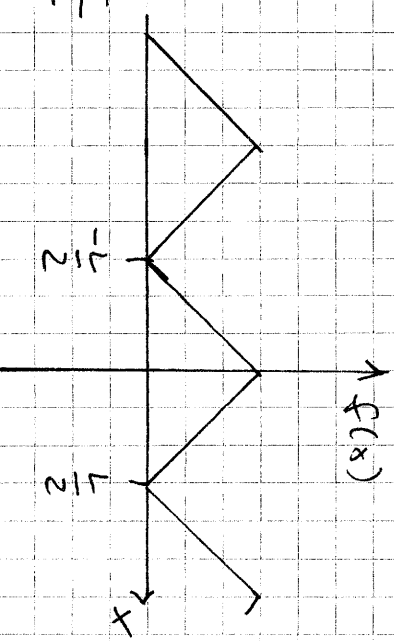
$= \frac{2}{L^2} \left[\frac{L}{2} \frac{e^{-ik_n \frac{L}{2}}}{-ik_n} + \frac{L}{2} \frac{e^{ik_n \frac{L}{2}}}{-ik_n} \right] = 0 \quad \text{antisym}$

$= \frac{1}{-i2\pi n} \frac{1}{2 \cos \frac{2\pi n \frac{L}{2}}{L}} = \frac{i}{\pi n} \cos \pi n = \begin{cases} \frac{i}{\pi n} (-1)^n & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{\pi n} (-1)^n e^{ik_n x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} (-1)^{n+1} \frac{e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}}{2i}$

• $f(x) = 1 - \frac{2|x|}{L}$

$\Rightarrow \partial_x f(x) = -\frac{2}{L} \Theta(x)$



$= -\frac{2}{\pi L} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin 2\pi (2n+1) \frac{x}{L}$

Integration $f(x) = -\frac{2}{L} \int dx \Theta(x)$

$\Rightarrow f(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{4}{\pi^2} \cos 2\pi (2n+1) \frac{x}{L}$

$\Rightarrow \hat{f}(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{2}{L} \frac{2}{\pi^2 n^2} & n \text{ ungerade} \end{cases}$

$= \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{2}{\pi^2 n^2} & n \text{ ungerade} \\ a_0 & n = 0 \end{cases}$

aus $\hat{f}(n) = -\frac{2}{L} \hat{\Theta}(n) \quad -\frac{2}{L} \cdot \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{ik_n}$

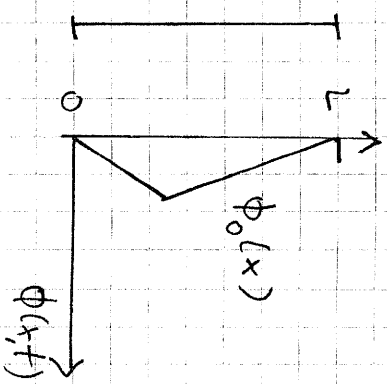
Anwendung: Schwingende Saite eines Saiteninstrumentes

- durch anzupfen wird die Saite aus dem Gleichgewicht gebracht.

⇒ Anfangsbedingungen der Saite

zur Zeit $t=0$: $\phi(x,0) = \phi_0(x)$

$$\partial_t \phi(x,0) = 0$$



- Die Bewegung der Saite folgt aus der Wellengleichung

$$[\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2] \phi(x,t) = 0$$

Schallgeschwindigkeit

- Wir lösen die Gleichung durch zerlegen in Fourierkomponenten:

$$\phi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(n,t) e^{ik_n x}$$

$$\Rightarrow \hat{\phi}(n,0) = \hat{\phi}_0(n) = \frac{1}{L} \int_0^L dx e^{-ik_n x} \phi_0(x)$$

$$\Rightarrow [\partial_t^2 + c k_n^2] \hat{\phi}(n,t) = 0 \quad : \text{Harmonischer Oszillator für jede Mode } n$$

$$\Rightarrow \hat{\phi}(n,t) = \underbrace{\cos c k_n t}_{\omega_n} \cdot \hat{\phi}_0(n) \quad : \text{Harmonische Schwingung}$$

mit Frequenz $\omega_n = \frac{2\pi c n}{L}$

$$\phi_0(x) \quad \text{---} \quad \hat{\phi}_0(n) \sim \frac{1}{n} \quad : \text{wenige Obertöne, dumpfer Klang}$$

$$\phi_0(x) \quad \text{---} \quad \hat{\phi}_0(n) \sim \frac{1}{n} \quad : \text{viele Obertöne, kräftiger Klang}$$

9.2 Fouriertransformation

Für eine Funktion $f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $|f(x)|$ integrierbar, ist die Fouriertransformierte definiert als

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x)$$

Somit ist $\hat{f}(k)$ wieder eine Funktion für $k \in \mathbb{R}$

Bsp.: $f(x) = e^{-a|x|}$

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-a|x|} = \int_{-\infty}^0 dx e^{-(a+ik)x} + \int_0^{\infty} dx e^{-(a-ik)x}$$

$$= \frac{1}{a+ik} + \frac{1}{a-ik} = \frac{2a}{a^2+k^2}$$

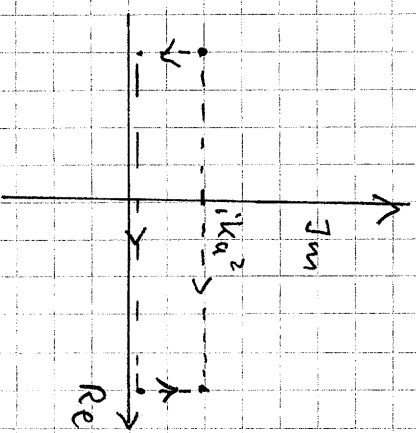
• $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2a}}$

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-\frac{x^2}{2a}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2a} (x+ika^2)^2} e^{-\frac{a^2 k^2}{2}}$$

$$= e^{-\frac{a^2 k^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{(x+ika^2)^2}{2a^2}}$$

$$= e^{-\frac{a^2 k^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}_{a\sqrt{2\pi}}$$

$$= a\sqrt{2\pi} e^{-\frac{a^2 k^2}{2}}$$



24.V

24.1