Analog zu den Fourierreihen läßt sich $f(x)$ wieder darstellen als

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}\, e^{ikx}\, \hat{f}(k)$$

⌈ Der Beweis folgt aus

$$\int \frac{dk}{2\pi}\, e^{+ikx}\, \hat{f}(k) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{dk}{2\pi}\, e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}k^2}\, e^{+ikx}\, \hat{f}(k)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int \frac{dk}{2\pi} \int dy\, e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}k^2}\, e^{ikx}\, e^{-iky}\, f(y)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int dy\, f(y) \underbrace{\int \frac{dk}{2\pi}\, e^{-\frac{\varepsilon^2 k^2}{2}}\, e^{-ik(y-x)}}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon}\, e^{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int dy\, f(y) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon}\, e^{-\frac{(y-x)^2}{2\varepsilon^2}}}_{\xrightarrow{\varepsilon \to 0}\ \delta(x-y)}$$: Konvergiert gegen eine δ-Funktion

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy\, f(y)\, \delta(y-x) = f(x)$$ ⌋

Es gilt daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{ik(x-y)} = 2\pi\, \delta(x-y)$$

Die Fouriertransformation kann auch von der Fourierreihe hergeleitet werden im Limes $L \to \infty$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{ik_n x} \qquad k_n = \frac{2\pi}{L} n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{L} \cdot \frac{1}{2\pi} \underbrace{L \, c_n}_{} \, e^{ik_n x} \qquad \Delta k = \frac{2\pi}{L} : \text{immer dichter für } L \to \infty$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta k}{2\pi} \, e^{ik_n x} \, g(k_n) \quad : \text{Riemannsumme}$$

$$\xrightarrow[\substack{L \to \infty \\ \Delta k \to 0}]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \, e^{ikx} \, g(k)$$

$$\text{mit } g(k_n) = L \cdot \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx \, e^{-ik_n x} f(x) \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-ikx} f(x) \equiv \hat{f}(k)$$

gerade der Fouriertransformierten

Wichtige Faustregel

$$\frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xrightarrow[L \to \infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi}$$

30.1

26 VL