

Eigenschaften der Fouriertransformierten:

- $f(x)$ reell $\Rightarrow \hat{f}(k) = \hat{f}^*(-k)$
- $f(x)$ symmetrisch $\Rightarrow \hat{f}(k) = \hat{f}(-k)$

• Satz von Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) g^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{f}(k) g^*(k)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) g^*(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \hat{f}(k) g^*(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{f}(k) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} g(x) \right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \hat{f}(k) g^*(k) \end{aligned}$$

Die Fouriertransformierte einer Faltung erfüllt:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) g(x-y) : \text{Faltung}$$

$$\Rightarrow \hat{h}(k) = \hat{f}(k) \hat{g}(k)$$

und umgekehrt gilt für ein Produkt

$$h(x) = g(x) \cdot f(x)$$

$$\Rightarrow \hat{h}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \hat{g}(q) \hat{f}(k-q) : \text{Faltung im Fourierraum}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-ikx} f(y) g(x-y)$$

$$x = z + y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iky} f(y) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-ikz} g(z) = \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k)$$

Für Ableitungen gilt:

$$h(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

$$h(x) = x \cdot f(x)$$

$$\Rightarrow \hat{h}(k) = ik \hat{f}(k)$$

$$\Rightarrow \hat{h}(k) = i \frac{d}{dk} \hat{f}(k)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{d}{dx} f(x) = \underbrace{\left[e^{-ikx} f(x) \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{d}{dx} e^{-ikx} \right) f(x)$$

$$= \int dx ik e^{-ikx} f(x) = ik \hat{f}(k)$$

Im höheren Dimensionen ist die Fouriertransformierte definiert als

$$f(\vec{r}) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \hat{f}(\vec{k})$$

$$\hat{f}(\vec{k}) = \int d\vec{r} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} f(\vec{r})$$

Falls das Feld $\varphi(\vec{r}, t)$ zusätzlich noch zeitabhängig ist, so ist es Forderung, das Vorzeichen für die Fourier-Transformation bezüglich der Zeit zu drehen.

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \varphi(\vec{k}, \omega)$$

$$\varphi(\vec{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r} e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \varphi(\vec{r}, t)$$

[Der Grund dafür ist die Lorentz-Invarianz für die elegante Formulierung erlaubt (Relativitätstheorie)]

Laufende Welle mit konstanter Phase: $\vec{k}\vec{r} - \omega t = \text{const}$

$$\Rightarrow k r \cos\vartheta - \omega t = \text{const}$$

$$r = \frac{\text{const} + \omega t}{k \cos\vartheta} \quad \text{Geradengleichung}$$

Welle mit konstanter Geschwindigkeit

9.3. Anwendung

Als Anwendung wollen wir nochmals die Lösung zur partiellen Differentialgleichungen suchen

$$-\Delta \phi(\vec{r}) + \overset{\uparrow}{m^2} \phi(\vec{r}) = 4\pi \delta(\vec{r})$$

Masse des Austauschteilchens

Diesmal wenden wir auf beiden Seiten die Fourier-Transformation an:

$$\int d\vec{r} e^{-i\vec{k}\vec{r}} \Delta \phi(\vec{r}) = -k^2 \hat{\phi}(\vec{k}) \quad k^2 \equiv k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$$\int d\vec{r} e^{-i\vec{k}\vec{r}} m^2 \phi(\vec{r}) = m^2 \hat{\phi}(\vec{k})$$

$$\int d\vec{r} e^{-i\vec{k}\vec{r}} 4\pi \delta(\vec{r}) = 4\pi$$

und die Gleichung reduziert sich zu einer algebraischen Gleichung

$$[k^2 + m^2] \hat{\phi}(\vec{k}) = 4\pi$$

$$\Rightarrow \hat{\phi}(\vec{k}) = \frac{4\pi}{k^2 + m^2}$$

Die Lösung hat somit die Form

$$\phi(\vec{r}) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{k^2+m^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Mittels Kugelkoordinaten können wir dieses Integral berechnen

$$\phi(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \int_0^\infty \frac{dk k^2}{(2\pi)^3} \cdot \frac{4\pi}{k^2+m^2} e^{i k r \cos\vartheta}$$

$$\begin{aligned} d\vec{z} &= \cos\vartheta \, dz \\ &= \sin\vartheta \, d\vartheta \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \int_{-1}^1 dz \int_0^\infty \frac{dk}{\pi} \frac{k^2}{k^2+m^2} e^{i k r z} \end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty \frac{dk}{\pi} \frac{k^2}{k^2+m^2} \frac{1}{i r} \left[e^{i k r} - e^{-i k r} \right]$$

$$= \int_0^\infty \frac{dk}{\pi} \frac{k}{k^2+m^2} \frac{1}{i r} \left[e^{i k r} - e^{-i k r} \right] \quad k \text{ gekürzt}$$

$$= \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{dk}{\pi} \frac{k}{k^2+m^2} \frac{1}{i} e^{i k r} \quad \int_0^\infty dk \rightarrow - \int_{-\infty}^0 dk$$

$$= \frac{1}{r} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{\pi} \frac{(-1)}{k^2+m^2} \partial_r e^{i k r} = \frac{1}{r} \partial_r \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{\pi} \frac{(-1)}{k^2+m^2} e^{i k r}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{r} \partial_r \frac{(-1)}{m} e^{-m r} = \frac{e^{-m|\vec{r}|}}{|\vec{r}|} \xrightarrow{m \rightarrow 0} \frac{1}{|\vec{r}|} \\ &\uparrow \end{aligned}$$

Fouriertransformation für $e^{-a r}$, $a=m$, $r>0$