$$\boldsymbol{a} = a_1\, \boldsymbol{e}_1 + a_2\, \boldsymbol{e}_2 + a_3\, \boldsymbol{e}_3 \tag{6.1}$$

Damit das funktioniert, muss gelten:

- Die Anzahl der Basisvektoren muss der Dimension des Raumes entsprechen.
- Die Vektoren müssen linear unabhängig sein, d.h.

  $$a_1\, \boldsymbol{e}_1 + a_2\, \boldsymbol{e}_2 + a_3\, \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0}$$

  darf nur erfüllt sein für alle $a_i = 0$.

  Anschaulich: Es darf nie möglich sein, einen der Basisvektoren durch ein Linearkombination der anderen darzustellen. Er muss in eine Richtung zeigen, die durch die anderen nicht darstellbar ist.

In einer gegebenen Basis wird oft die Komponentenschreibweise verwendet:

$$\boldsymbol{a} = a_1\, \boldsymbol{e}_1 + a_2\, \boldsymbol{e}_2 + a_3\, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

> **Achtung:** Basis! Die Komponenten allein lassen noch KEINEN Rückschluss auf die Basisvektoren zu!
> Vgl. Kugelkoordinaten:
>
> $$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix}$$
>
> Was sollen hier die Basisvektoren sein?

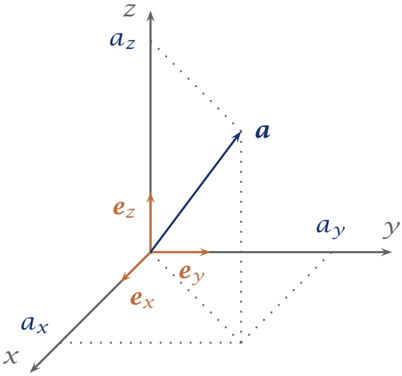
Außerdem sollte man immer daran denken zu **welcher** Basis die Komponenten gehören.

Bei *kartesischen* Koordinaten sind die Addition und die skalare Multiplikation in der Komponentenschreibweise wie folgt definiert:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

$$\lambda \boldsymbol{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

6.2.2 Kartesische Koordinaten



Natürliche Basis: Basisvektoren zeigen entlang der Koordinatenachsen x, y und z.

$$\boldsymbol{a} = a_x\, \boldsymbol{e}_x + a_y\, \boldsymbol{e}_y + a_z\, \boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

6.3 Vektoroperationen

6.3.1 Skalarprodukt

In kartesischen Koordinaten definiert man das *Skalarprodukt* als:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3 \tag{6.6}$$

Andere Schreibweise für das Skalarprodukt:

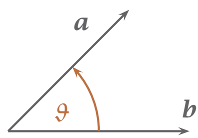
$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{b} \rangle = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

Man sieht damit schnell, dass die Länge eines Vektors, die wir auch Betrag nennen, berechnet werden kann mit:

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{6.7}$$

Für das Skalarprodukt gilt:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos(\vartheta) \tag{6.8}$$



Wegen dieser Eigenschaft nennt man Vektoren mit $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$ *orthogonal*.

Die Basis $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ ist *orthonormiert* , denn die Vektoren erfüllen:

$$\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_z = 0 \qquad \text{orthogonale Basis} \tag{6.9a}$$

$$|\boldsymbol{e}_x| = |\boldsymbol{e}_y| = |\boldsymbol{e}_z| = 1 \qquad \text{normierte Basis} \tag{6.9b}$$