

Bemerkung: Die Axiome des Skalarprodukts lauten mit drei Vektoren \mathbf{x} , \mathbf{y} und \mathbf{z} und dem Skalar α :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle &\geq 0, \quad \text{insbesondere } \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle \in \mathbb{R} \\ \langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle &= 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0 \\ &\text{komplex konjugiert} \\ \langle \alpha \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle &= \overline{\alpha} \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle \\ \langle \mathbf{x} | \alpha \mathbf{y} \rangle &= \alpha \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle \\ \langle \mathbf{x} + \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle &= \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle \\ \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} + \mathbf{z} \rangle &= \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle \\ \overline{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle} &= \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle \end{aligned}$$

In kartesischen Koordinaten lautet das Skalarprodukt für zwei Vektoren \mathbf{v} und \mathbf{w} über dem \mathbb{R}^n

$$\langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i, \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n,$$

während über einem komplexen Vektorraum \mathbb{C}^n gilt

$$\langle \mathbf{v} | \mathbf{w} \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{v_i} w_i, \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n.$$

6.3.2 Vektorprodukt

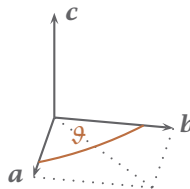
Mit dem Vektorprodukt

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \tag{6.10}$$

führt man einen Vektor \mathbf{c} ein, der orthogonal zu \mathbf{a} und \mathbf{b} ist und den Betrag

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\vartheta) \tag{6.11}$$

hat.



Der Betrag $|\mathbf{c}|$ entspricht dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das von \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannt wird.

Die Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} bilden in dieser Reihenfolge ein *rechtshändiges Dreibein*. (Rechte-Hand-Regel)

Beziehungen:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad (6.12a)$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (6.12b)$$

Achtung: Das Vektorprodukt ist NICHT kommutativ!

In kartesischen Koordinaten gilt die Komponentendarstellung:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \mathbf{c} \quad (6.13)$$

Ist das Vektorprodukt in der Physik relevant?

- Drehimpuls:

$$\mathbf{L} = \underbrace{\mathbf{r}}_{\text{Ort}} \times \underbrace{\mathbf{p}}_{\text{Impuls}}$$

- Lorentzkraft:

$$\mathbf{F} = \underbrace{q}_{\text{Ladung}} \left(\underbrace{\mathbf{E}}_{\text{el. Feld}} + \underbrace{\mathbf{v}}_{\text{Geschwindigkeit der Ladung}} \times \underbrace{\mathbf{B}}_{\text{Magnetfeld}} \right)$$

A-2 Zur Berechnung von Determinanten

In der Vorlesung wurde die Jacobi-Determinante im Zusammenhang mit mehrdimensionalen Integralen eingeführt. In diesem Abschnitt soll darauf eingegangen werden, wie man eine Determinante berechnet.

Zur Determinante

Eine Determinante ist eine Abbildung, die einer quadratischen Matrix eindeutig eine Zahl zuordnet. Diese kann reell oder komplex sein. Das hängt von den Matrixelementen ab. Man schreibt für die $N \times N$ -Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{N-1,N} \\ a_{N,1} & \cdots & a_{N,N-1} & a_{N,N} \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{N-1,N} \\ a_{N,1} & \cdots & a_{N,N-1} & a_{N,N} \end{vmatrix}$$

und meint mit letzterem die Determinante von \mathbf{A} .

Zur Berechnung einer Determinante

Allgemein lässt sich eine Determinante mit dem Entwicklungssatz berechnen. Dieser besagt, dass für eine Determinante gilt:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\nu=1}^N (-1)^{\mu+\nu} a_{\mu\nu} \det \mathbf{A}_{\mu\nu} \quad (1 \leq \mu \leq N, \text{ fest}) \quad (\text{A.1})$$

$$\det \mathbf{A} = \sum_{\mu=1}^N (-1)^{\mu+\nu} a_{\mu\nu} \det \mathbf{A}_{\mu\nu} \quad (1 \leq \nu \leq N, \text{ fest}) \quad (\text{A.2})$$

Dabei ist $\mathbf{A}_{\mu\nu}$ in Gleichung (A.1) die Untermatrix, bei der sowohl die Zeile μ als auch die Spalte ν , also die Zeile und die Spalte, in denen das Matrixelement $a_{\mu\nu}$ steht, entfernt wurden. Dies ist nun eine $(N-1) \times (N-1)$ -Matrix, also eine Dimension kleiner als die Matrix \mathbf{A} . Den Entwicklungssatz kann man rekursiv anwenden, bis man bei einer 1×1 -Matrix angekommen ist, deren Determinante einfach das einzige verbleibende Matrixelement ist. Da man in Gleichung (A.1) über alle Matrixelemente

der Zeile μ summiert, spricht man in diesem Fall von der „Entwicklung nach der μ -ten Zeile“. Ganz analog kann man sich überlegen, wie die „Entwicklung nach der ν -ten Spalte“ in Gleichung (A.2) funktioniert. Über den Entwicklungssatz ist der Wert einer Determinante definiert, d.h. der Satz ist mehr als eine Berechnungsmethode. Er legt eindeutig fest, was der Wert einer Determinante ist. Für kleine Matrizen gibt es einfache Formeln, so dass man sich den - im ersten Moment vielleicht kompliziert wirkenden - Entwicklungssatz für diese nicht merken muss.

Zur Berechnung einer 2×2 -Determinante

Für eine 2×2 -Determinante erhält man:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Man kann sich einfach merken: Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen minus Produkt der Elemente der Nebendiagonalen.

Zur Berechnung einer 3×3 -Determinante

Für Determinanten von 3×3 -Matrizen gibt es ebenfalls noch eine einfache Methode, die Regel von Sarrus:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Um sich die Regel von Sarrus leicht merken zu können, schreibt man sich - nach etwas Übung meist nur noch in Gedanken - die ersten beiden Spalten noch einmal neben die eigentliche Determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

Mit diesem Bild vor Augen addiert man die Produkte der Matrixelemente, die mit durchgezogenen Linien verbunden sind, und subtrahiert davon die Produkte der Elemente, die mit gepunkteten Linien verbunden sind.

A-5 Matrizen

Ein rechteckiges Zahlenschema der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

nennt man eine $m \times n$ -Matrix. Das Matrixelement $a_{i,j}$ [andere gebräuchliche Schreibweise: $(A)_{i,j}$] steht in der i -ten Zeile und in der j -ten Spalte.

Besondere Matrixformen

Ist die Zahl der Spalten und Zeilen gleich, liegt also eine $n \times n$ -Matrix vor, spricht man von einer *quadratischen* Matrix.

Die Matrix $\mathbf{0}$, bei der alle Matrixelemente verschwinden, $a_{i,j} = 0$, heißt *Nullmatrix*.

Eine quadratische Matrix \mathbf{D} , bei der nur die Elemente auf der Hauptdiagonalen $d_{i,i}$ von Null verschieden sind,

$$D = \begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & d_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{n,n} \end{pmatrix},$$

heißt *Diagonalmatrix*.

Die Diagonalmatrix \mathbf{E} (manchmal auch $\mathbf{1}$ genannt), bei der alle Diagonalelemente den Wert $d_{i,i} = 1$ haben, heißt *Einheitsmatrix*.

Transponierte und adjungierte Matrizen

Vertauscht man in der Matrix A ihre Zeilen und Spalten, so erhält man die zu A *transponierte* Matrix, die den Namen A^T trägt. Im Beispiel aus Gleichung (A.3) erhält man:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1}^T & a_{1,2}^T & \cdots & a_{1,m}^T \\ a_{2,1}^T & a_{2,2}^T & \cdots & a_{2,m}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}^T & a_{n,2}^T & \cdots & a_{n,m}^T \end{pmatrix} \stackrel{(A.3)}{=} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass so aus einer $m \times n$ - eine $n \times m$ -Matrix wird. Für die einzelnen Elemente gilt entsprechend $a_{i,j}^T = (A^T)_{i,j} = a_{j,i} = (A)_{j,i}$. Man kann sich das Transponieren als Spiegelung der Matrixelemente an der Hauptdiagonalen vorstellen.

Im Fall komplexer Matrixelemente $a_{i,j}$ definiert man darüber hinaus die zu A *adjungierte* Matrix A^\dagger , die zusätzlich zum Transponieren noch komplex konjugiert wird, $A^\dagger = \overline{A^T}$. Für ihre Elemente gilt $a_{i,j}^\dagger = (A^\dagger)_{i,j} = \overline{a_{j,i}} = \overline{(A)_{j,i}}$.

Spur und Determinante

Für quadratische Matrizen A sind mit der Determinante $\det(A)$ und der Spur $\text{Tr}(A)$ zwei wichtige Skalare definiert, die sich eindeutig aus der Matrix ergeben. Die Determinante ist aus ihrem eigenen Infoblatt bekannt. Die Spur einer $n \times n$ -Matrix A ist die Summe ihrer Hauptdiagonalelemente:

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

Symmetrische, antisymmetrische, hermitesche und antihermitesche Matrizen:

Eine quadratische Matrix nennt man *symmetrisch*, wenn die Elemente $a_{i,j}$ und $a_{j,i}$, also die beiden Elemente, die bei einer Spiegelung an der Hauptdiagonalen vertauscht werden, gleich sind, $a_{i,j} = a_{j,i}$. Für symmetrische Matrizen gilt $A^T = A$, das heißt die Matrix ist mit ihrer transponierten identisch.

Eine quadratische Matrix mit der Eigenschaft $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ nennt man *antisymmetrisch* oder *schiefssymmetrisch*. Für ihre Elemente gilt $a_{i,j} = -a_{j,i}$. Daraus folgt sofort, dass alle Diagonalelemente verschwinden müssen $a_{i,i} = 0$.

Eine komplexe quadratische Matrix, die mit ihrer adjungierten identisch ist, $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}$, nennt man *hermitesch* oder *selbstadjungiert*. Für ihre Matrixelemente gilt $a_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$. Entsprechend nennt man Matrizen mit der Eigenschaft $\mathbf{A}^\dagger = -\mathbf{A}$ oder $a_{i,j} = -\overline{a_{j,i}}$ *antihermitesch*.

Vektoren als Matrizen

Ein n -dimensionaler *Spaltenvektor*

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

kann als $n \times 1$ -Matrix aufgefasst werden. Die zugehörige transponierte $1 \times n$ -Matrix

$$\mathbf{a}^T = (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$$

bezeichnet man als n -dimensionalen *Zeilenvektor*.

Gleichheit zweier Matrizen

Zwei Matrizen sind gleich, wenn alle ihre Elemente gleich sind.

Addition und Subtraktion

Zwei $m \times n$ -Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} werden addiert oder subtrahiert, indem man die Elemente, die sich an der gleichen Stelle befinden, aufaddiert oder von einander subtrahiert. Ein Beispiel ist:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \pm b_{1,1} & a_{1,2} \pm b_{1,2} \\ a_{2,1} \pm b_{2,1} & a_{2,2} \pm b_{2,2} \end{pmatrix}$$

Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl

Wird eine Matrix mit einer Zahl multipliziert, so multipliziert man jedes Element mit dieser Zahl. Beispiel:

$$cA = c \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{1,1} & ca_{1,2} \\ ca_{2,1} & ca_{2,2} \end{pmatrix}$$

Multiplikation zweier Matrizen

Die $m \times n$ -Matrix A und die $n \times p$ -Matrix B lassen sich in der Form multiplizieren, dass als Produkt eine neue $m \times p$ -Matrix C entsteht, deren Elemente

$$c_{i,j} = \sum_k a_{i,k} b_{k,j}$$

lauten.

Die Multiplikation merkt man sich am einfachsten, indem man die Matrizen - nach etwas Übung ganz automatisch in Gedanken - in Zeilen- und Spaltenvektoren aufteilt. Für die Matrix A erhält man m Zeilenvektoren der Dimension n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{Z1}^T \\ \mathbf{a}_{Z2}^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{Zm}^T \end{pmatrix}$$

Entsprechend kann man die Matrix B in p Spaltenvektoren der gleichen Dimension n aufteilen:

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} = (\mathbf{b}_{S1} \quad \mathbf{b}_{S2} \quad \cdots \quad \mathbf{b}_{Sp})$$

Dann lassen sich die Elemente der Matrix C als Skalarprodukte dieser Vektoren verstehen:

$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{Z1} \cdot \mathbf{b}_{S1} & \mathbf{a}_{Z1} \cdot \mathbf{b}_{S2} & \cdots & \mathbf{a}_{Z1} \cdot \mathbf{b}_{Sp} \\ \mathbf{a}_{Z2} \cdot \mathbf{b}_{S1} & \mathbf{a}_{Z2} \cdot \mathbf{b}_{S2} & \cdots & \mathbf{a}_{Z2} \cdot \mathbf{b}_{Sp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{Zm} \cdot \mathbf{b}_{S1} & \mathbf{a}_{Zm} \cdot \mathbf{b}_{S2} & \cdots & \mathbf{a}_{Zm} \cdot \mathbf{b}_{Sp} \end{pmatrix}$$

Natürlich schreibt man das nie in diesen Schritten auf, sondern stellt sich nur die entsprechenden Zeilen und Spalten vor und multipliziert diese im Kopf. Als Regel merkt man sich, dass Matrizen multipliziert werden, indem man Zeilen mit Spalten multipliziert.

Man beachte, dass das Matrixprodukt nicht kommutativ ist. Für das Produkt zweier Matrizen A und B heißt das im Allgemeinen $AB \neq BA$. Selbstverständlich sind die beiden Reihenfolgen nur dann möglich, wenn A eine $m \times n$ -Matrix und B eine $n \times m$ -Matrix sind.

Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

Eine Multiplikation eines n -dimensionalen Vektors mit einer $m \times n$ -Matrix funktioniert exakt so wie die Multiplikation zweier Matrizen, wenn man einen n -dimensionalen Spaltenvektor \mathbf{b} als $n \times 1$ -Matrix auffasst:

$$A\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{Z1}^T \\ \mathbf{a}_{Z2}^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{Zm}^T \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{Z1} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{a}_{Z2} \cdot \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{Zm} \cdot \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis ist ein m -dimensionaler Spaltenvektor. Analog gilt für einen m -dimensionalen Zeilenvektor \mathbf{b}^T , den man als $1 \times m$ -Matrix verstehen muss:

$$\mathbf{b}^T A = \mathbf{b}^T (\mathbf{a}_{S1} \quad \mathbf{a}_{S2} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{Sn}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_{S1} \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_{S2} \quad \cdots \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_{Sn})$$

Skalarprodukt als Matrixprodukt

Das Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ kann im Sinne des Matrixprodukts als Multiplikation des Zeilenvektors \mathbf{a}^T mit dem Spaltenvektor \mathbf{b} verstanden werden:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} \quad (\text{A.4})$$

Dyadisches Produkt

Mit dem dyadischen Produkt

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_m \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_m \end{pmatrix}$$

wird aus den Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} eine Matrix gebildet. Dazu wird der n -dimensionale Spaltenvektor \mathbf{a} mit dem m -dimensionalen Zeilenvektor \mathbf{b}^T im Sinne des Matrixprodukts multipliziert. Es entsteht eine $n \times m$ -Matrix

Inverse Matrix

Gibt es zu einer $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} eine weitere $n \times n$ -Matrix \mathbf{B} , für die gilt, dass das Produkt von \mathbf{B} mit \mathbf{A} die Einheitsmatrix \mathbf{E} ergibt, so nennt man \mathbf{B} die *Inverse* zu \mathbf{A} und schreibt $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Es gilt also:

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$$

Nicht jede Matrix besitzt eine Inverse. Gibt es jedoch eine Inverse zu \mathbf{A} , nennt man \mathbf{A} invertierbar. Wie man die Inverse berechnet, würde den Umfang dieses Blattes sprengen. Das kommt aber ganz sicher in der Mathematik. In ein paar Spezialfällen, die auf diesem Blatt vorkommen, erhält man die Inverse auf einem sehr einfachen Weg.

Inverse und Transponierte bei Produkten von Matrizen

Die Inverse eines Produktes AB von Matrizen ist

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

wie sich leicht zeigen lässt, denn:

$$(AB)^{-1}AB = B^{-1}\underbrace{A^{-1}A}_E B = B^{-1}EB = \underbrace{B^{-1}B}_E = E$$

Für die Transponierte des Produktes AB findet man mit etwas Überlegung:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Orthogonale Matrizen

Eine $n \times n$ -Matrix

$$R = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ r_{2,1} & r_{2,2} & \cdots & r_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n,1} & r_{n,2} & \cdots & r_{n,n} \end{pmatrix} = (\mathbf{r}_{S1} \quad \mathbf{r}_{S2} \quad \cdots \quad \mathbf{r}_{Sn})$$

nennt man orthogonal, wenn alle ihre Spaltenvektoren \mathbf{r}_{Si} paarweise orthogonal aufeinander stehen und auf 1 normiert sind, wenn also $\mathbf{r}_{Si} \cdot \mathbf{r}_{Sj} = \delta_{i,j}$ für alle $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ gilt. Das gilt dann automatisch auch für ihre Zeilenvektoren. Ausgedrückt über das Matrixprodukt kann man diese Bedingung sehr einfach schreiben:

$$RR^T = R^T R = E$$

Das heißt also, das Produkt einer orthogonalen Matrix mit ihrer Transponierten ergibt die Einheitsmatrix. Oder anders ausgedrückt: Die Transponierte einer orthogonalen Matrix ist ihre Inverse.

Es lässt sich leicht beweisen, dass die Menge aller orthogonalen $n \times n$ -Matrizen eine Gruppe bilden. Man nennt sie die orthogonale Gruppe $O(n)$. Ebenfalls kann man

einfach berechnen, dass eine orthogonale Matrix nur die Determinante $+1$ oder -1 haben kann. Die orthogonalen $n \times n$ -Matrizen mit der Determinante $+1$ bilden eine eigene Gruppe, eine Untergruppe von $O(n)$, die spezielle orthogonale Gruppe heißt und mit $SO(n)$ bezeichnet wird.

Drehungen im Raum mit Matrizen aus $SO(3)$

Die Matrizen aus $SO(3)$ sind in der Mechanik besonders wichtig, weil sie Drehungen beschreiben. Wird ein Vektor \mathbf{x} auf eine orthogonale Matrix \mathbf{R} multipliziert, $\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}$, ändert er nur seine Richtung, nicht seine Länge. Dass \mathbf{x}' und \mathbf{x} den gleichen Betrag haben, lässt sich sehr einfach berechnen. Dazu gehen wir vom Betragsquadrat aus und schreiben das Skalarprodukt wie oben als Matrixprodukt:

$$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = (\mathbf{R}\mathbf{x}) \cdot \mathbf{R}\mathbf{x} \stackrel{(A.4)}{=} (\mathbf{R}\mathbf{x})^T \mathbf{R}\mathbf{x} \stackrel{(A.5)}{=} \mathbf{x}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \stackrel{(A.4)}{=} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$$

Ein einfaches Beispiel für eine Drehung um den Winkel φ um die z -Achse ist die Matrix

$$\mathbf{R}_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wählt man den Vektor $\mathbf{a}^T = (1 \ 0 \ 0)$ und $\varphi = \pi/2$, sollte die Matrix den Vektor \mathbf{a} gerade auf die y -Achse drehen. Kommt das so heraus?

$$\mathbf{R}_z(\pi/2)\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schiefsymmetrische 3×3 -Matrizen

Aus der Bedingung $a_{i,j} = -a_{j,i}$ für schiefsymmetrische Matrizen lässt sich ablesen, dass die Diagonalelemente $a_{i,i}$ verschwinden müssen, $a_{i,i} = 0$. In drei Dimensionen

hat eine schiefsymmetrische Matrix

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

also nur drei Komponenten. Die Multiplikation einer solchen schiefsymmetrischen Matrix $\mathbf{\Omega}$ mit einem Vektor kann mit Hilfe des Vektorprodukts umgeschrieben werden in

$$\mathbf{\Omega a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} ,$$

wobei

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} .$$

Unitäre Matrizen

In Ergänzung zu den orthogonalen Matrizen sei noch angemerkt, dass ihre Entsprechung bei komplexen Matrizen die unitären Matrizen sind. Für unitäre Matrizen gilt:

$$\mathbf{U U}^\dagger = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{E}$$

Symplektische Matrizen

Wesentlich wichtiger werden in der kanonischen Mechanik aber – je nach gewähltem Schwerpunkt – symplektische Matrizen werden.

Die reellen symplektischen $(2n \times 2n)$ -Matrizen bilden ebenfalls eine Gruppe. Zu ihr gehören alle Matrizen \mathbf{M} , die

$$\mathbf{M}^\text{T} \mathbf{J} \mathbf{M} = \mathbf{J}$$

mit der Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{E}_n \\ -\mathbf{E}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix}$$

erfüllen. Dabei sind $\mathbf{0}_n$ und E_n die $n \times n$ -Null- und -Einheitsmatrizen. Symplektische Matrizen haben die Determinante +1 und die Inverse einer symplektischen Matrix lautet:

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M}^T \mathbf{J} \quad \text{mit} \quad \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T = -\mathbf{J}$$

3.6. Lineare Gleichungssysteme

Ein LGS besteht aus mehreren linearen Gleichungen in mehreren Variablen:

$$\begin{array}{rcl}
 A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n & = & b_1 \\
 A_{21}x_1 + \dots & & A_{2n}x_n = b_2 \\
 \vdots & & \vdots \\
 A_{k1}x_1 + A_{k2}x_2 + \dots & & A_{kn}x_n = b_k
 \end{array} \quad (3.22)$$

Matrizen Schreibweise

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b} \quad (3.23)$$

Lösung: Gaußalgorithmus

- Vertauschen von Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$
- Addition einer Zeile zu einer anderen

• Endzustand: Dreiecksform

Vollständige Lösung: Rückwärtseinsetzen

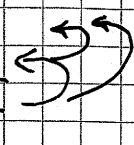
Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
 -x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\
 2x_1 + x_2 + x_3 = 2
 \end{array} \quad (3.24)$$

1. Matrix $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$

2. 1. + 2. Zeile $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$

3. $2 \times 1. \text{Zeile} - 3. \text{Zeile}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$

4. $2 \times 3. \text{Zeile} + 2. \text{Zeile}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{5}{2} \\ x_3 = \frac{5}{-3} \end{array}$ 

Rückwärts einsetzen

Lösung: $\underline{x} = \left(1, \frac{5}{2}, -\frac{5}{3} \right)$