4 Komplexe Zahlen

Die *komplexen Zahlen* sind eine Erweiterung der reellen Zahlen. Die Konstruktion erfolgt durch $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

4.1 Notwendigkeit und Darstellung

4.1.1 Einführung

Hat die Gleichung

$$z^2 = -1 \tag{4.1}$$

eine Lösung?

Nicht für $z \in \mathbb{R}$, aber es kann sinnvoll sein, solche Gleichungen trotzdem zu lösen, deshalb erweitern wir die bisher verwendeten reellen Zahlen:

$$i^2 = -1 \tag{4.2}$$

Damit hat die Gleichung (4.1) zwei Lösungen:

$$z_1 = i\ ,\ z_2 = -i \tag{4.3}$$

i wird auch als *imaginäre Einheit* bezeichnet.

Eine komplexe Zahl wird dann geschrieben als:

$$z = x + iy \tag{4.4}$$

wobei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl bezeichnet.

- $x \in \mathbb{R}$ — *Realteil* von z (auch $\mathrm{Re}(z)$ oder $\Re(z)$)
- $y \in \mathbb{R}$ — *Imaginärteil* von z (auch $\mathrm{Im}(z)$ oder $\Im(z)$)

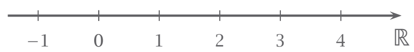
Beispiele für komplexe Lösungen:

$$z^2 = -4\,,\ z = \pm 2i$$

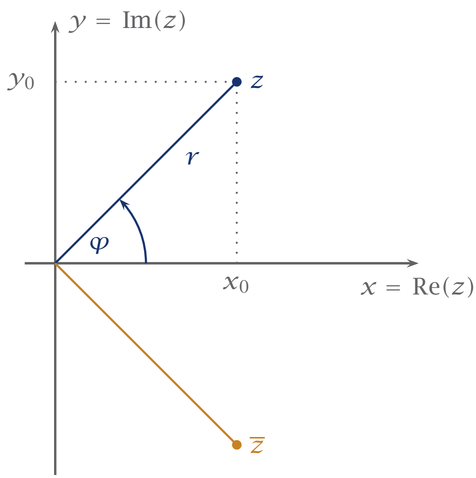
$$\begin{aligned} z^2 - 4z + 29 &= 0 \\ z_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 29}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-100}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{100}\ i}{2} \\ &= 2 \pm 5i \end{aligned}$$

4.1.2 Polare Darstellung

Reelle Zahlen können auf einer Achse dargestellt werden.



Für komplexe Zahlen benötigt man entsprechend Gleichung (4.4) **zwei** reelle Achsen. Sie werden in der *komplexen Zahlenebene* oder *Gauß'schen Ebene* dargestellt.



Man sieht, dass jede komplexe Zahl eindeutig durch den *Betrag*

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \tag{4.5a}$$

und durch das *Argument* oder die *Phase*

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) \tag{4.5b}$$

beschrieben werden kann. Diese Art der Darstellung wird *Polar-Darstellung* genannt.

Umrechnung:

$$\mathrm{Re}(z) = x = r\cos(\varphi) \tag{4.6a}$$

$$\mathrm{Im}(z) = y = r\sin(\varphi) \tag{4.6b}$$

oder:

$$z = \underbrace{r\cos(\varphi)}_{x} + i\,\underbrace{r\sin(\varphi)}_{y} = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \tag{4.6c}$$

Bemerkung: Sollte das Argument im Gradmaß gefragt sein, dann kann man zur Umrechnung die Beziehung

$$180^\circ \triangleq \pi$$

verwenden. Aus dieser lassen sich die Umrechnungsformeln herleiten

$$\varphi_{\mathrm{rad}} = \frac{\varphi_{\mathrm{deg}}}{180^\circ}\pi\,, \quad \varphi_{\mathrm{deg}} \in [0^\circ, 360^\circ)$$
$$\varphi_{\mathrm{deg}} = \frac{\varphi_{\mathrm{rad}}}{\pi}180^\circ\,, \quad \varphi_{\mathrm{rad}} \in [0, 2\pi)$$

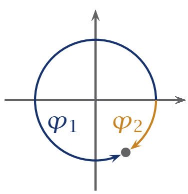
Beispiel: -60° im Bogenmaß.

$$\varphi_{\mathrm{rad}} = \frac{-60^\circ}{180^\circ}\pi = -\frac{1}{3}\pi$$

oder man verwendet $-60^\circ \triangleq 300^\circ$:

$$\varphi_{\mathrm{rad}} = \frac{300^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{5}{3}\pi$$

Es handelt sich in beiden Fällen um den gleichen Winkel, allerdings von zwei verschiedenen Richtungen aus abgemessen.



4.1.3 Euler Form

Die Schreibweise (4.6c) führt auf eine weitere Darstellung:

$$\begin{aligned}
z &\overset{(4.6c)}{=} r\cos(\varphi) + ir\sin(\varphi) \\
&= r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \\
&\overset{(2.6)}{\underset{(2.7)}{=}} r\left(\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(\underbrace{-1}_{i^2})^n}_{i^{2n}} \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + \underbrace{i\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n}_{i^{2n}}}_{i^{2n+1}} \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \\
&= r\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \\
&= r\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = re^{i\varphi}
\end{aligned}$$

Wir halten also fest:

$$\begin{aligned}
z &= x + iy \\
&= r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \\
&= re^{i\varphi}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Der letzte Term heißt *Euler-Darstellung*.

4.2 Rechnen mit komplexen Zahlen

- Gleichheit zweier komplexer Zahlen

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \text{ und } y_1 = y_2$$

- Addition und Subtraktion

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 \\
&= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

- Multiplikation

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 - y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned} \tag{4.9}$$

oder mit:

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1)) = r_1e^{i\varphi_1} \\ z_2 &= r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2)) = r_2e^{i\varphi_2} \\ z_1 \cdot z_2 &= r_1r_2\ e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \\ &= r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Merke: Bei der Multiplikation werden die Beträge multipliziert und die Argumente addiert.

- Komplexe Konjugation

$$\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy \tag{4.11}$$

$\overline{z}$ heißt zu z *komplex konjugiert*. Die beiden Zahlen unterscheiden sich nur im Vorzeichen des Imaginärteils.

Dafür gelten folgende Regeln:

$$z + \overline{z} = x + iy + x - iy = x + x = 2\ \mathrm{Re}(z) \tag{4.12a}$$

$$z - \overline{z} = x + iy - x + iy = iy + iy = 2i\ \mathrm{Im}(z) \tag{4.12b}$$

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = r^2 = |z|^2 \tag{4.12c}$$

$|z|^2$ heißt auch Betragsquadrat.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \tag{4.12d}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \tag{4.12e}$$

$$\overline{z_1 + iz_2} \underset{(4.12e)}{\overset{(4.12d)}{=}} \overline{z_1} - i\overline{z_2} \tag{4.12f}$$

- Division zweier komplexer Zahlen:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$
$$= \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} \tag{4.13a}$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\, e^{i\varphi_1}}{r_2\, e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \tag{4.13b}$$

Man spricht vom „Erweitern mit dem komplex Konjugierten“, oder vom „Nenner reell umschreiben“.

4.3 Funktionen mit komplexen Zahlen

Funktionen mit komplexen Zahlen können über eine Potenzeihe definiert werden — vgl. die Exponentialfunktion in Unterabschnitt 4.1.3. Ableitungen können wir analog der Ableitung reeller Funktionen definieren (siehe Kapitel 1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\, z^n = n\, z^{n-1} \tag{4.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\, e^z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}\, z^{n-1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^n = e^z \tag{4.15}$$

Auf diese Art erhält man für die elementaren Funktionen die gleichen Ableitungen, wie im Reellen.

4.3.1 Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion ist bereits bekannt aus Unterabschnitt 4.1.3.

Ein paar Eigenschaften und Beziehungen:

$$e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{=r} e^{iy} = r\, e^{iy} \tag{4.16a}$$