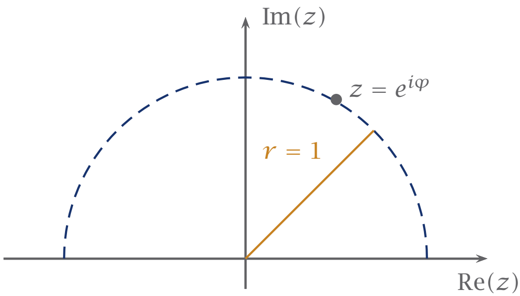
x: Realteil bestimmt den Betrag $|e^z| = e^x$
y: Imaginärteil bestimmt das Argument $\arg(e^z) = y$

Betrachte nun den Spezialfall:

$$e^{i\varphi} \text{ mit } \varphi \in \mathbb{R}$$
$$|e^{i\varphi}| = \sqrt{e^{i\varphi}\, e^{-i\varphi}} = \sqrt{e^{i(\varphi-\varphi)}} = 1$$
$$e^{i\varphi} \text{ liegt auf dem Einheitskreis}$$



$$e^{i\pi} = -1 \tag{4.17}$$

4.3.2 Trigonometrische Funktionen

Mit (4.7) lassen sich ganz einfach die komplexen trigonometrischen Funktionen einführen:

$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \tag{4.18a}$$
$$\sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \tag{4.18b}$$
$$\tan(z) = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \tag{4.18c}$$

4.3.3 Hyperbelfunktionen

Mit (4.18a), (4.18b) und (4.18c) sieht man sofort:

$$
\begin{aligned}
\cos(iz) &\overset{(4.18a)}{=} \frac{1}{2}\left(e^{-z}+e^{z}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right)\\
&= \cosh(z) && (4.19a)\\
\sin(iz) &\overset{(4.18b)}{=} \frac{1}{2i}\left(e^{-z}-e^{z}\right) = \frac{i}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right)\\
&= i\,\sinh(z) && (4.19b)
\end{aligned}
$$

weiterhin:

$$
\begin{aligned}
\tanh(z) &= \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} && (4.19c)\\
\coth(z) &= \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} && (4.19d)
\end{aligned}
$$

Beispiele:

$$
\begin{aligned}
e^{z}+\overline{e^{z}} &= e^{x+iy}+\overline{e^{x+iy}}\\
&= e^{x+iy}+e^{\overline{x+iy}}\\
&= e^{x+iy}+e^{x-iy}\\
&= e^{x}\left(e^{iy}+e^{-iy}\right)\\
&= 2e^{x}\cos(y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e^{z}+\overline{e^{-z}} &= e^{x+iy}+e^{-x+iy}\\
&= 2e^{iy}\cosh(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha)\sin(\alpha) &= \frac{1}{4i}\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)\\
&= \frac{1}{4i}\left(e^{i2\alpha}-e^{-i2\alpha}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sin(2\alpha)
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe der komplexen Darstellungen (4.18a), (4.18b) und (4.18c) lassen sich leicht die Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen beweisen.

4.4 Mehrdeutige Lösungen

4.4.1 Wurzeln

Wir wissen bereits

$$z^2 = -1 \tag{4.1}$$

hat zwei Lösungen

$$z = \pm i \tag{4.3}$$

Wie sieht das für $z^3 = 1$ aus?

Behauptung: Die Lösungen sind:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \qquad z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$z_1^3 = 1, \quad z_2^3 = e^{i\frac{2\pi}{3}\cdot 3} = e^{i2\pi} = 1, \quad z_3^3 = e^{i\frac{4\pi}{3}\cdot 3} = e^{i4\pi} = 1$$

Woher kommt das?

Wir können jede komplexe Zahl schreiben als

$$w \overset{(4.7)}{=} r\ e^{i\varphi}$$

Die gleiche Zahl wird auch beschrieben durch

$$w \overset{(4.7)}{=} r\ e^{i(\varphi + 2k\pi)}\ , \quad k \in \mathbb{Z} \tag{4.20}$$

Die Gleichung $z^n = w = r\ e^{i\varphi} = r\ e^{i(\varphi+2k\pi)}$ hat die Lösungen

$$z_n = w^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\ e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})} \tag{4.21a}$$

Das ergibt n verschiedene Lösungen, z.B.

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \tag{4.21b}$$

Weiteres Beispiel:

$$z^4 = 1$$

$$\text{Lösungen:} \quad z_1 = 1,\ z_2 = -1,\ z_3 = i,\ z_4 = -i$$

4.4.2 Logarithmus

Auch die Lösung von

$$e^z = w \tag{4.22}$$

hat wegen der Vieldeutigkeit von (4.20) mehr als eine Lösung, nämlich:

$$\begin{aligned} z = \ln(w) &\overset{(4.20)}{=} \ln\left(r\ e^{i(\varphi+2k\pi)}\right) = i(\varphi+2k\pi) + \ln(r) \\ &= i\varphi + i2k\pi + \ln(r) \end{aligned} \tag{4.23}$$

Der Logarithmus hat unendlich viele Lösungen.

Den Teil $\ln(w) = \ln(r) + i\varphi$ mit $0 \le \varphi \le 2\pi$ nennt man *Hauptwert*.

$$\ln(e) = 1 + i2k\pi \qquad \text{Hauptwert: } 1 \tag{4.24a}$$

$$\ln(1) = 0 + i2k\pi \qquad \text{Hauptwert: } 0 \tag{4.24b}$$

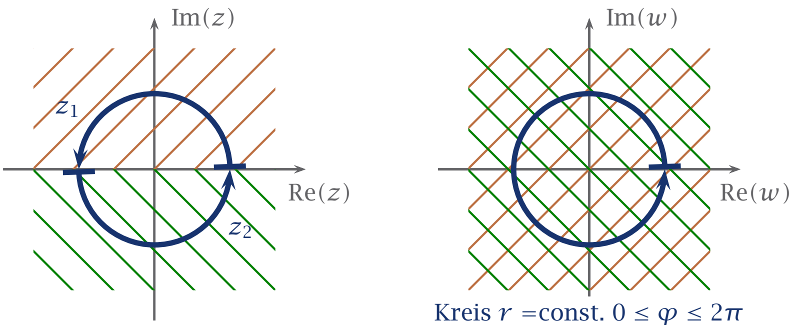
$$\ln(i) = \ln\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = i\frac{\pi}{2} + i2k\pi \qquad \text{Hauptwert: } i\frac{\pi}{2} \tag{4.24c}$$

$$\ln(-1) = \ln\left(e^{i\pi}\right) = i\pi + i2k\pi \qquad \text{Hauptwert: } i\pi \tag{4.24d}$$

4.5 Riemannsche Blätter

Wir betrachten $z^2 = w$ für $w = re^{i\varphi}$. Nach (4.21a) und (4.21b) gilt:

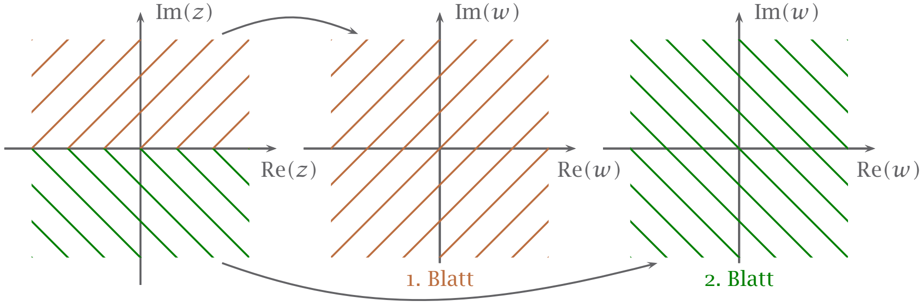
$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{r}\ e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ z_2 &= \sqrt{r}\ e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)} \end{aligned} \tag{4.25}$$



Kreis r =const. $0 \le \varphi \le 2\pi$

Die „obere“ z-Ebene ($\mathrm{Im}(z) \geq 0$) reicht aus, um über (4.25) jeden Punkt auf der w-Ebene zu erreichen. Das gleiche gilt für die „untere“ z-Ebene.

Damit die Zuordnung trotzdem eindeutig ist, führt man *Riemannsche Blätter* ein.



Anmerkungen:

- Die Aufteilung obere/untere Hälfte ist willkürlich. Man kann auch andere Aufteilungen vornehmen.
- Die getrennte Zeichung oben ist nicht vollständig. Die Blätter liegen eigentlich übereinander und sind in einem Schnitt verbunden: *Riemannsche Fläche*.
- Für $w = 0$ gibt es nur eine Lösung $z_1 = z_2 = 0$. An solchen Punkten stoßen die Blätter immer aufeinander. $w = 0$ heißt *Verzweigungspunkt* und liegt auf beiden Blättern.
- Die n-te Wurzel benötigt n Blätter
- Der Logarithmus benötigt unendlich viele Blätter.