# 5 Gewöhnliche Differentialgleichungen

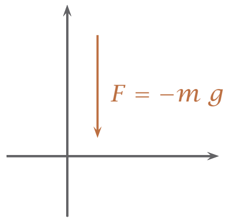
Eine *Differentialgleichung* ist eine Gleichung einer gesuchten Funktion $y(x_i)$, die von einem oder mehreren $x_i$ abhängt und ihre eigenen Ableitungen enthält. Sie drückt eine Abhängigkeit zwischen den Variablen $x_i$, der Funktion $y$ und Ableitungen dieser Funktion aus.

## 5.1 Motivation mit Beispielen aus der Physik

Newtonsche Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \overset{\substack{\text{konst. Masse}\\ \downarrow}}{=} m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x = m\ddot{x} = F$$

Bsp: homogenes Gravitationsfeld




$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) = -m\,g \tag{5.2a}$$

Lösung:

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0 \tag{5.2b}$$

Über den radioaktiven Zerfall ist bekannt, dass die Anzahl der pro Zeitintervall zerfallenden Teilchen proportional zur Teilchenzahl $N$ ist:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t) = \dot{N}(t) = -\Gamma\,N(t) \tag{5.3a}$$

Lösung:

$$N(t) = N_0 e^{-\Gamma\, t} \tag{5.3b}$$

Wie findet man die Lösungen? Das wird im Folgenden besprochen.

## 5.2 Ein paar Begriffe

| | | |
|---|---|---|
| *Ordnung* | : | höchste vorkommende Ableitung |
| *linear* | : | Die Gleichung ist linear in der unbekannten Funktion und allen ihren Ableitungen. |
| *gewöhnlich* | : | Die gesuchte Funktion hängt nur von einer Variablen ab. |
| *partiell* | : | Bsp: $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 0$, Gegenteil von gewöhnlich. |

Hier werden nur gewöhnliche DGL betrachtet.

> **Bemerkung:** DGL := Differentialgleichung(en)

## 5.3 Differentialgleichungen 1. Ordnung

### 5.3.1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Sind von der Form

$$y'(x) = a(x)\ y(x) + b(x) \tag{5.4}$$

Es gibt Standardverfahren diese DGL zu lösen. Dazu gehören:

### a) $a(x) = 0$, einfaches Integral

$$y'(x) \underset{a(x)=0}{\overset{(5.4)}{=}} b(x) \tag{5.5a}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int b(x)\,\mathrm{d}x \\ &= B(x) + c \qquad (5.5b) \\ B(x) &= \text{Stammfunktion} \\ c &= \text{Integrationskonstante, wird z.B. durch} \\ &\quad\ \text{eine Anfangsbedingung festgelegt.} \end{aligned}$$

**Beispiel:** Fall im Schwerefeld

$$\dot{v} \overset{(5.2a)}{=} -g\ \text{, mit } v(0) = 5\frac{m}{s} \tag{5.6a}$$

$$v(t) = v_0 - g\ t \tag{5.6b}$$

$$v(0) = v_0 \overset{!}{=} 5\frac{m}{s} \tag{5.6c}$$

$$\text{Also: } v(t) \underset{(5.6c)}{\overset{(5.6b)}{=}} -g\ t + 5\frac{m}{s}$$

### b) $b(x) = 0$, homogene DGL

Enthält die DGL *keinen* Term, in dem y oder seine Ableitungen nicht vorkommen, heißt sie *homogen*.

$$y'(x) = a(x)\ y(x) \tag{5.7a}$$

Dies können wir einfach lösen:

$$\begin{aligned} \int \frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x &= \int a(x)\,\mathrm{d}x \\ \ln|y(x)| &= A(x) + \tilde{c} \qquad A(x)\text{: Stammfunktion} \\ y(x) &= \pm e^{A(x)+\tilde{c}} \\ &= c\ e^{A(x)} \qquad c = \pm e^{\tilde{c}} \qquad (5.7b) \end{aligned}$$

**Radioaktiver Zerfall** [*siehe* (5.3a), (5.3b)]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}N(t) = \underbrace{-\Gamma}_{a(t)} N(t)\,, \quad N(0) = N_0$$

$$A(t) = -\Gamma t + \tilde{c}$$

$$N(t) \underset{(5.3a)}{\overset{(5.7b)}{=}} c\ e^{-\Gamma t}$$

$$N(0) = c \overset{!}{=} N_0$$

$$\text{Also: } N(t) = N_0\ e^{-\Gamma t}$$

Anmerkung: Man kann vereinfacht schreiben:

$$y'(x) = a(x)\ y(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Umgeformt:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int a(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.8}$$

Diese Schreibweise nennt man auch *Separation der Variablen*. Dies ist aber nur als verkürzte Schreibweise zu verstehen, die zwar immer funktioniert, (5.7b) ist aber der eigentliche Lösungsweg.

### c) Inhomogene DGL

Für das vollständige Problem (5.4) führt der Weg über die *Variation der Konstanten* zum Ziel einer allgemeingültigen Form.

**Ansatz:**

$$y_p(x) = \underbrace{c(x)}_{\text{Variable statt Konstante}} \overbrace{e^{A(x)}}^{\text{Lösung der zugehörigen homogenen DGL}}, A(x) = \int a(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.9a}$$

Nach dem Einsetzen in (5.4) bleibt:

$$c'(x) = b(x) e^{-A(x)} \tag{5.9b}$$