oder

$$c(x) = \int b(x)e^{-A(x)}\,\mathrm{d}x \tag{5.9c}$$

oder

$$y_p(x) \overset{(5.9a)}{\underset{(5.9c)}{=}} e^{A(x)} \int b(x)e^{-A(x)}\,\mathrm{d}x \tag{5.9d}$$

$y_p(x)$ ist *eine* spezielle (*partikuläre*) Lösung von (5.4). Wir können auf diese jede Lösung $y_h(x)$ der zugehörigen homogenen DGL (5.7a) addieren, denn

$$\begin{aligned}(y_h(x) + y_p(x))' &= y_h'(x) + y_p'(x)\\ &= \underbrace{a(x)\ y_h(x)}_{\overset{(5.7a)}{=} y_h'(x)} + \underbrace{a(x)\ y_p(x) + b(x)}_{\overset{(5.4)}{=} y_p'(x)} = a(x)\ (y_h(x) + y_p(x)) + b(x)\end{aligned}$$

Also lautet die allgemeine Lösung von (5.4):

$$y(x) \overset{(5.7b)}{\underset{(5.9d)}{=}} ce^{A(x)} + e^{A(x)} \int b(x)\ e^{-A(x)}\,\mathrm{d}x \tag{5.9e}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}y'(x) &= \underbrace{-2x}_{a(x)}\, y(x) + \underbrace{4x}_{b(x)}\\ \text{daraus folgt: } A(x) &= -x^2\\ y_h(x) &= ce^{-x^2}\\ y_p(x) &= e^{-x^2} \underbrace{\int 4x\ e^{x^2}\,\mathrm{d}x}_{2\ e^{x^2}} = 2\\ \text{Lösung: } y(x) &= 2 + c\ e^{-x^2}\end{aligned}$$

5.3.2 Nichtlineare DGL 1. Ordnung

Nichtlineare DGL 1. Ordnung sind von der Form $y'(x) = F(x, y)$ mit beliebig kompliziertem F. Im Allgemeinen existiert keine geschlossene Lösung. Ein allgemeingültiges Lösungsverfahren gibt es also nur in Spezialfällen, welche wir im Folgenden behandeln werden.

a) Separable Gleichungen

$$\text{Form: } y'(x) = f(x)\, g(y) \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned} \text{Umformen: } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x)\, g(y) \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} &= \int f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{5.12}$$

Seien die Stammfunktionen:

$$\tilde{G}(y) = \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} \tag{5.13a}$$

und

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.13b}$$

bekannt. Dann lautet die Lösung zu (5.11):

$$y(x) = \tilde{G}^{-1}(F(x) + c) \tag{5.13c}$$

Für diese Darstellung muss $\tilde{G}$ umkehrbar sein.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \overbrace{y'(x)}^{=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} &= x + xy^2 = \overbrace{x}^{f(x)}\overbrace{(1 + y^2)}^{g(y)} \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2} &= \int x\,\mathrm{d}x \\ \arctan(y) &= \frac{1}{2}x^2 + c \\ y(x) &= \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right) \end{aligned}$$