oder

$$c(x) = \int b(x) e^{-A(x)} \, dx \tag{5.9c}$$

oder

$$y_p(x) \overset{(5.9a)}{\underset{(5.9c)}{=}} e^{A(x)} \int b(x) e^{-A(x)} \, dx \tag{5.9d}$$

$y_p(x)$ ist *eine* spezielle (*partikuläre*) Lösung von (5.4). Wir können auf diese jede Lösung $y_h(x)$ der zugehörigen homogenen DGL (5.7a) addieren, denn

$$\begin{aligned}(y_h(x) + y_p(x))' &= y_h'(x) + y_p'(x) \\ &= \underbrace{a(x)\; y_h(x)}_{\overset{(5.7a)}{=} y_h'(x)} + \underbrace{a(x)\; y_p(x) + b(x)}_{\overset{(5.4)}{=} y_p'(x)} = a(x)\; (y_h(x) + y_p(x)) + b(x)\end{aligned}$$

Also lautet die allgemeine Lösung von (5.4):

$$y(x) \overset{(5.7b)}{\underset{(5.9d)}{=}} c e^{A(x)} + e^{A(x)} \int b(x)\; e^{-A(x)} \, dx \tag{5.9e}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \underbrace{-2x}_{a(x)} y(x) + \underbrace{4x}_{b(x)} \\ \text{daraus folgt: } A(x) &= -x^2 \\ y_h(x) &= c e^{-x^2} \\ y_p(x) &= e^{-x^2} \underbrace{\int 4x\; e^{x^2} \, dx}_{2\; e^{x^2}} = 2 \\ \text{Lösung: } y(x) &= 2 + c\; e^{-x^2} \end{aligned}$$

5.3.2 Nichtlineare DGL 1. Ordnung

Nichtlineare DGL 1. Ordnung sind von der Form $y'(x) = F(x, y)$ mit beliebig kompliziertem F. Im Allgemeinen existiert keine geschlossene Lösung. Ein allgemeingültiges Lösungsverfahren gibt es also nur in Spezialfällen, welche wir im Folgenden behandeln werden.

a) Separable Gleichungen

$$\text{Form: } y'(x) = f(x)\, g(y) \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}
\text{Umformen: } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x)\, g(y) \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} &= \int f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Seien die Stammfunktionen:

$$\tilde{G}(y) = \int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} \tag{5.13a}$$

und

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5.13b}$$

bekannt. Dann lautet die Lösung zu (5.11):

$$y(x) = \tilde{G}^{-1}(F(x) + c) \tag{5.13c}$$

Für diese Darstellung muss $\tilde{G}$ umkehrbar sein.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\overbrace{y'(x)}^{=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} &= x + xy^2 = \overbrace{x}^{f(x)}\,\overbrace{(1+y^2)}^{g(y)} \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} &= \int x\,\mathrm{d}x \\
\arctan(y) &= \frac{1}{2}x^2 + c \\
y(x) &= \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + c\right)
\end{aligned}$$

b) Geschickte Substitution

Gelegentlich lässt sich eine DGL durch eine günstige *Substitution* auf eine bekannte, lösbare Form bringen.

Beispiel: Bernoulli-DGL

$$y' = a(x)\ y + b(x)\ y^{\alpha} \quad , \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, 1 \tag{5.14}$$

Substitution:

$$\begin{aligned} z(x) &= (y(x))^{1-\alpha} \qquad (5.15a) \\ z'(x) &= (1-\alpha)\ (y(x))^{-\alpha}\ y'(x) \end{aligned}$$

oder

$$y(x)^{-\alpha}\ y'(x) = \frac{1}{1-\alpha} z'(x) \tag{5.15b}$$

Multiplikation von (5.14) mit $y^{-\alpha}$.

$$\underbrace{y'(x)\ (y(x))^{-\alpha}}_{\overset{(5.15b)}{=} \frac{z'(x)}{1-\alpha}} = a(x)\, \underbrace{(y(x))^{1-\alpha}}_{\overset{(5.15a)}{=} z(x)} + b(x) \tag{5.15c}$$

$$z'(x) = (1-\alpha)\ (a(x)\ z(x) + b(x)) \tag{5.15d}$$

Auf diesem Weg können wir eine DGL der Bernoulli-Form (5.14) immer zu einer linearen DGL umformen, die mit den Methoden des vorherigen Abschnitts lösbar ist.

5.4 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Allgemeine Form:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i(x) y^{(i)}(x) = b(x) \tag{5.16}$$

5.4.1 Eigenschaften der Lösungen

Aus der Form (5.16) erkennt man, dass wenn die $y_i(x)$ mit $i = 1, \dots, n$ Lösungen der homogenen DGL zu (5.16) mit $b(x) = 0$ sind, so auch

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, y_i(x) \, , \quad c_i \in \mathbb{C} \tag{5.17}$$

Sind die $y_i(x)$ alle unabhängigen Lösungen von (5.16), heißt $y_h(x)$ *allgemeine Lösung* der homogenen DGL.

Ist für $b(x) \neq 0$ (inhomogene DGL) $y_p(x)$ eine partikuläre Lösung der DGL, so löst auch

$$y_a(x) = y_h(x) + y_p(x) \overset{(5.17)}{=} \sum_i c_i \, y_i(x) + y_p(x) \tag{5.18}$$

die DGL (5.16).

Haben wir eine DGL von der Form (5.16), müssen wir also $y_h(x)$ und $y_p(x)$ bestimmen, um ihre Lösungen zu erhalten.

Mit nicht konstanten Koeffizienten $a(x)$ kann es beliebig kompliziert werden. Daher beschränken wir uns auf konstante Koeffizienten.

5.4.2 Konstante Koeffizienten

Form:

$$\sum_{i=1}^{N} \underbrace{a_i}_{\text{Hängen nicht von } x \text{ ab.}} \, y^{(i)}(x) = b(x) \tag{5.19}$$

Vorgehen in Schritten:

(i) Bestimme $y_h(x)$

(ii) Bestimme ein $y_p(x)$

(iii) Die gesuchte Lösung ist (5.18)

a) homogene DGL

Das heißt (5.19) mit $b(x) = 0$:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \, y^{(i)}(x) = 0 \tag{5.20}$$

Es gibt eine Standardmethode, die prinzipiell immer funktioniert.

Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$

Einsetzen in (5.20):

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \, \lambda^i e^{\lambda x} = 0$$

$e^{\lambda x} \neq 0$, daher Division erlaubt:

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \, \lambda^i = a_N \lambda^N + a_{N-1} \lambda^{N-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \tag{5.21}$$

Das Problem reduziert sich also auf die Lösung des Polynoms (5.21). Es heißt *charakteristisches Polynom*. Auf diesem Weg erhalten wir alle N unabhängigen Lösungen von (5.20). Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) Falls alle N Lösungen von (5.21) verschieden sind, sind bereits alle $y_i(x) = e^{\lambda_i x}$ linear unabhängig und die allgemeine Lösung hat die Form

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \, e^{\lambda_i x} \,, \quad c_i \in \mathbb{C}. \tag{5.22}$$

(ii) Es gibt mehrfache Nullstellen des Polynoms, das heißt einige λ_i haben den gleichen Wert und die zugehörigen Lösungen $e^{\lambda_i x}$ sind nicht unabhängig.

In diesem Fall gilt:

Ist λ_i k_i-fache Nullstelle, dann lautet die Lösung:

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{j=1}^{k_i - 1} c_{i,j} \, x^j \right) e^{\lambda_i x} \,, \quad c_{i,j} \in \mathbb{R} \tag{5.23}$$

M ist die Zahl der unabhängigen (verschiedenen) Nullstellen von (5.21).

Beispiel:

$$y^{(6)}(x) - 10y^{(5)}(x) + 40y^{(4)}(x) - 82y^{(3)}(x) + 91y''(x) - 52y'(x) + 12y(x) = 0$$

charakteritisches Polynom:

$$\begin{aligned} \lambda^6 - 10\lambda^5 + 40\lambda^4 - 82\lambda^3 + 91\lambda^2 - 52\lambda + 12 = 0 \\ = (\lambda_3 - 3)(\lambda_2 - 2)^2(\lambda_1 - 1)^3 \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 1$ ist dreifache Nullstelle
$\lambda_2 = 2$ ist doppelte Nullstelle
$\lambda_3 = 3$ ist einfache Nullstelle

Lösung:

$$y_h(x) = (c_1 + c_2\,x + c_3\,x^2)\,e^x + (c_4 + c_5\,x)\,e^{2x} + c_6\,e^{3x}$$

Besonderheit bei reellen Koeffizienten:

Sind *alle* Koeffizienten a_i der DGL (5.20) reell und gibt es komplexe Lösungen $\lambda_i = \alpha_i + i\,\beta_i$ des charakteristischen Polynoms (5.21), dann ist auch die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{\lambda_i} = \alpha_i - i\,\beta_i$ eine Lösung:

$$\sum_{j=0}^{N} a_j\,\overline{\lambda}_i^{\,j} = 0$$

Diese beiden Lösungen lassen sich dann schreiben als

$$\begin{aligned} & c_i\,e^{\lambda_i x} + \tilde{c}_i\,e^{\overline{\lambda_i} x} \\ &= c_i\,e^{\alpha_i x + i\,\beta_i x} + \tilde{c}_i\,e^{\alpha_i x - i\,\beta_i x} \\ &= e^{\alpha_i x}\left(c_i\,e^{i\,\beta_i x} + \tilde{c}_i\,e^{-i\,\beta_i x}\right) \\ &= e^{\alpha_i x}\,A\,\cos(\beta_i x + \varphi) \\ &= e^{\alpha_i x}\,A\,\sin(\beta_i x + \tilde{\varphi}) \end{aligned} \tag{5.24a}$$

Das heißt, die Lösungen können durch $\sin(x)$ und $\cos(x)$ ausgedrückt werden. Diese sind unabhängig.

Äquivalent zu (5.24a) ist:

$$y_h(x) = \ldots + e^{\alpha_i x}\,(A\,\cos(\beta_i x) + B\,\sin(\beta_i x)) \tag{5.24b}$$

b) inhomogene DGL

Wenn für die DGL (5.16) die Lösung der zugehörigen homogenen DGL der Form (5.20) bekannt ist, reicht es *eine* partikuläre Lösung von (5.16) zu kennen. Es gibt kein allgemeines Verfahren diese partikuläre Lösung zu bestimmen. Vielfach sind die Ausdrücke $b(x)$ aber so einfach, dass leicht eine Lösung, oder zumindest ein Ansatz, erraten werden kann.

Immer einen Versuch wert sind:

(i) für $b(x) = B\, e^{\alpha x}$

$$\text{Ansatz: } y_p(x) = A\, e^{\alpha x} \tag{5.25a}$$

(ii) für $b(x) = B_1 \cos(\alpha x) + B_2 \sin(\alpha x)$

$$\text{Ansatz: } y_p(x) = A_1 \cos(\alpha x) + A_2 \sin(\alpha x) \tag{5.25b}$$

(iii) für $b(x) = B_0 + B_1\, x + B_2\, x^2 + \ldots + B_n\, x^n$

$$\text{Ansatz: } y_p(x) = A_0 + A_1\, x + A_2\, x^2 + \ldots + A_n\, x^n \tag{5.25c}$$

(iv) Ist $b(x)$ eine Summe oder ein Produkt der Formen **i**, **ii** oder **iii**, kann man für den Ansatz eine Summe oder ein Produkt der gleichen Form versuchen.

(v) Kommt einer der Terme aus **i**, **ii**, **iii** und **iv** bereits in der homogenen Lösung $y_h(x)$ vor, kann man versuchen, im Ansatz den entsprechen Term mit der kleinsten Potenz von x zu multiplizieren, sodass der Term sich von allen homogenen Lösungen unterscheidet.

Beispiel:

$$b(x) = e^{2x},\ y_h(x) = a\, e^{2x} + b\, e^{-3x}$$
$$y_p(x) = B\, x\, e^{2x}$$

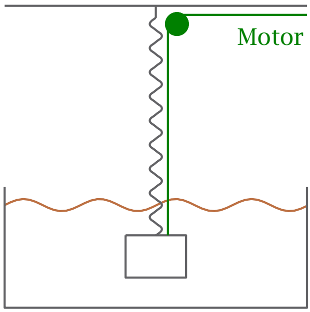
c) Beispiele

DGL eines getriebenen, gedämpften harmonischen Oszillators:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = f(t) \tag{5.27}$$

Wo kommt das in der Physik vor?

Beispiel: Federpendel im Ölbad.



Öl: geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft

$$F_R = -\tilde{\gamma} v$$

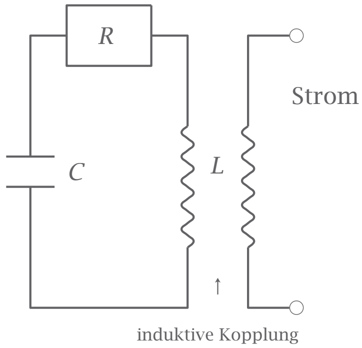
Dann lauten die Konstanten für (5.27):

$$\gamma = \frac{\tilde{\gamma}}{2m}$$

$$f = \frac{F(t)}{m} \qquad \text{(Kraft des Motors)}$$

$$\omega_0^2 = \frac{D}{m} \qquad D = \text{Federkonstante}$$

Beispiel: Elektrischer Schwingkreis



$$
\begin{aligned}
L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C} I &= I_{\text{err}}(t) \\
\ddot{I} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\gamma} \dot{I} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2} I &= \underbrace{\frac{I_{\text{err}}(t)}{L}}_{f(t)}
\end{aligned}
$$

Lösung der homogenen DGL für $\gamma < \omega_0$ (s. Übungen):

$$x_h(t) = e^{-\gamma t}(a\, e^{i\omega t} + b\, e^{-i\omega t}) \qquad \text{mit } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{5.28}$$

Beispiel für eine äußere Anregung:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= A\cos(\omega_0 t) \\
\text{Ansatz: } x_p(t) &= a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)
\end{aligned} \tag{5.29a}
$$

Ableiten und Einsetzen in (5.27):

$$
\begin{aligned}
&-a\omega_0^2\cos(\omega_0 t) - b\omega_0^2\sin(\omega_0 t) - 2\gamma a\omega_0\sin(\omega_0 t) \\
&\quad +2\gamma b\omega_0\cos(\omega_0 t) + a\omega_0^2\cos(\omega_0 t) + b\omega_0^2\sin(\omega_0 t) \overset{!}{=} A\cos(\omega_0 t) \\
&\qquad -2\gamma a\omega_0\sin(\omega_0 t) + 2\gamma b\omega_0\cos(\omega_0 t) \overset{!}{=} A\cos(\omega_0 t)
\end{aligned} \tag{5.29b}
$$

Koeffizientenvergleich

$\boxed{\cos(\omega_0 t)}$

$$\begin{aligned} 2\gamma\omega_0 b &= A \\ \rightarrow b &= \frac{A}{2\gamma\omega_0} \end{aligned} \tag{5.29c}$$

$\boxed{\sin(\omega_0 t)}$

$$\begin{aligned} 2\gamma\omega_0 a &= 0 \\ \rightarrow a &= 0 \end{aligned} \tag{5.29d}$$

$$x_p(t) \underset{\substack{(5.29c) \\ (5.29d)}}{\overset{(5.29a)}{=}} \frac{A}{2\gamma\omega_0} \sin(\omega_0 t) \tag{5.29e}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet also:

$$x_a(t) \underset{(5.29e)}{\overset{(5.28)}{=}} e^{-\gamma t}(a\, e^{i\omega t} + b\, e^{-i\omega t}) + \frac{A}{2\gamma\omega_0} \sin(\omega_0 t) \tag{5.29f}$$

d) Integrationskonstanten

Die Lösungen (5.22) bzw. (5.23) einer DGL n-ter Ordnung enthalten N Integrationskonstanten c_i. Diese werden festgelegt durch N Bedingungen. Das führt uns auf das *Anfangswertproblem*:

$$y(0) = A_1,\ y'(0) = A_2,\ \ldots,\ y^{(N-1)}(0) = A_{N-1}$$

oder das *Randwertproblem*:

$$y(0) = A_1,\ y'(x_1) = A_2,\ \ldots$$

e) Zusammenfassung

Lösungsschema:

(1.) Homogene DGL lösen:

$e^{\lambda x}$ funkioniert immer — aber nur im *homogenen* Fall und nur für *lineare* DGL mit *konstanten* Koeffizienten.

(2.) Eine partikuläre Lösung der inmhomogenen DGL bestimmen:

Siehe Unterunterabschnitt b)

(3.) Die allgemeine Lösung der DGL ergibt sich durch:

$y_a(x) = y_h(x) + y_p(x)$

(4.) Anfangs- oder Randbedingungen berücksichtigen.

5.5 Greensche Funktion

5.5.1 Allgemeine Betrachtung

Wir betracheten eine inhomogene, lineare DGL:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \, y^{(i)}(x) = b(x) \tag{5.19}$$

von der die Lösung $y_h(x)$ der zugehörigen homogenen DGL bekannt sei.

Das folgende Verfahren dient dazu, die Lösung von (5.19) zu finden, die mit einem Satz gewählter Anfangs- oder Randbedingungen verträglich ist.

Wir suchen dazu eine Funktion $G(x, z)$, sodass wir die Lösung berechnen können als

$$y(x) = \int_a^b G(x, z) \, b(z) \, \mathrm{d}z, \tag{5.30}$$